

1. Tentukan yang manakah diantara limit-limit berikut yang mempunyai bentuk tak tentu dan yang mana yang bukan. Kemudian tentukan nilai limit masing-masing.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x - \frac{1}{x} \right)$
 (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(x+1) - \ln(x-1))$
 (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2}{2^x}$
 (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^{-x}}$
 (e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\ln x}$
 (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln(x+e^x)}$
 (g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^x$
 (h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$

2. Tentukan nilai limit-limit berikut

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^{2016}}{x}$
 (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{2016}}{e^x}$
 (c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3 \sec x + 5}{\tan x}$
 (d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cot x}{\sqrt{-\ln x}}$
 (e) $\lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 \csc^2 x$
 (f) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\tan x - \sec x]$
 (g) $\lim_{x \rightarrow \infty} [x - \ln x]$
 (h) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\csc x}$
 (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\csc^2 x - \frac{1}{x^2} \right]$
 (j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 2e^x)^{1/x}$
 (k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x \cot x)$
 (l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_1^x \sqrt{1+e^{-t}} dt}{x}$
 (m) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x \sin t dt}{x-1}$

3. Tentukan

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x)^x$
 (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x)}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} ((x^x)^x)^x$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^{(x^x)})}$

4. Penggunaan aturan L'Hospital secara langsung tidak membantu penghitungan nilai limit-limit berikut. Silakan anda coba sendiri. Temukan cara lain untuk menghitung limit-limit tersebut.

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x+4}}{\sqrt{2x+5}}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2}}{xe^x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\sec x}{\tan x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{-1/x}}$

5. Untuk nilai a dan b yang manakah sehingga persamaan berikut benar?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x^3} + a + \frac{b}{x^2} \right) = 0.$$

6. Untuk nilai a yang mana persamaan berikut benar?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = e.$$

7. Yang manakah diantara integral berikut yang merupakan integral tak wajar? Jelaskan mengapa demikian!

(a) $\int_0^{\infty} e^{-x^3} dx$

(b) $\int_0^{\pi/4} \cot x dx$

(c) $\int_1^2 \frac{x}{x-1} dx$

(d) $\int_0^{\pi/4} \tan x dx$

(e) $\int_0^{\pi} \tan dx$

(f) $\int_0^1 \frac{1}{x^2-x-2} dx$

(g) $\int_{-2}^0 \frac{1}{x^2-x-2} dx$

(h) $\int_0^2 \frac{1}{x^2+x-3} dx$

8. Untuk masing-masing integral berikut, periksa apakah ia konvergen atau divergen. Kemudian hitung nilai integralnya jika ia konvergen.

- (a) $\int_3^{\infty} \frac{1}{(x-2)^{3/2}} dx$
- (b) $\int_2^{\infty} e^{-5t} dt$
- (c) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$
- (d) $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} dx$
- (e) $\int_0^{\infty} \sin^2 \theta d\theta$
- (f) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+x} dx$
- (g) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$
- (h) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{9+x^6} dx$
- (i) $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx$
- (j) $\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4} dx$
- (k) $\int_0^5 \frac{w}{w-2} dw$
- (l) $\int_0^3 \frac{dx}{x^2-6x+5}$
- (m) $\int_0^2 z^2 \ln z dz$

9. Laju rata-rata suatu molekul dalam gas ideal adalah

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-Mv^2/(2RT)} dv$$

dengan M merupakan berat molekul dari gas, R konstanta gas, T temperatur gas, dan v laju gas. Tunjukkan bahwa

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

10. Jika $f(t)$ kontinu untuk $t \geq 0$, Transformasi Laplace dari f adalah fungsi F yang didefinisikan melalui

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

dengan domai F meliputi semua bilangan s yang membuat integral di atas konvergen. Tentukan transformasi laplace untuk fungsi-fungsi berikut:

(a) $f(t) = 1$

(b) $f(t) = e^t$

(c) $f(t) = t$

11. Gunakan uji banding untuk menunjukkan kekonvergenan atau kedivergenan integral berikut

(a) $\int_1^{\infty} \frac{2+e^{-x}}{x} dx$

(b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4(1+x^4)} dx$

(c) $\int_2^{\infty} e^{-x^2} dx$

(d) $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}-1} dx$

(e) $\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1} x}{2+e^x} dx$

(f) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 \ln(x+1)} dx$

12. (a) Tunjukkan bahwa $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ divergen.

(b) Tunjukkan bahwa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t x dx = 0.$$

Ini menunjukkan bahwa secara umum

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \neq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t f(x) dx$$

13. Tentukan

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$$

14. Gunakan substitusi $u = 1/x$ untuk menunjukkan bahwa

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx = 0$$

15. Tentukan

$$\int_{-1}^{\infty} \left(\frac{x^4}{1+x^6} \right)^2 dx$$

16. Tentukan semua nilai p agar masing-masing integral berikut konvergen. Kemudian hitung nilai integralnya untuk p tersebut.

(a) $\int_e^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx$

(b) $\int_0^1 x^p \ln x dx$