oki neswan (fmipa-itb)

Persamaan Parametrik

Kita telah lama terbiasa dengan kurva yang didefinisikan oleh sebuah persamaan yang menghubungkan koordinat x dan y. Contohnya persamaan **eksplisit** seperti $y = x^2$ atau **implisit** seperti $x^2 + y^2 = 13$. Dalam geometri persamaan yang bergantung pada lokasi disebut persamaan **ekstrinsik**.

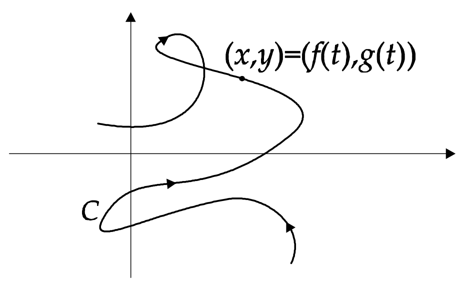
Persamaan $y = x^2$ disebut persamaan eksplisit karena y didefinisikan sebagai fungsi dari x. Jadi, untuk menentukan (satu-satunya) titik pada kurva dengan $x = -3$, untuk tiap x, cukup substitusikan nilai $x = -3$ pada fungsi x^2 untuk memperoleh $y = 9$. Maka diperoleh $(-3, 9)$ berada pada parabola $y = x^2$. Sedangkan, pada persamaan implisit, ketika nilai $x = -3$ disubstitusikan ke persamaan $x^2+y^2 = 13$, diperoleh $9+y^2 = 13$. Untuk memperolah nilai y kita harus menyelesaikan dulu persamaan tersebut, dan memperoleh $y = \pm 2$. Maka titik $(-3, 2)$ dan $(-3, -2)$ berada pada lingkaran $x^2 + y^2 = 13$. Persamaan ini mendefinisikan secara implisit y sebagai fungsi dari x, setelah diputuskan apakah $y > 0$ atau $y < 0$.

Persamaan **intrinsik** sebuah kurva adalah persamaan yang mendefinisikan kurva tersebut melalui hubungan antara sifat-sifat intrinsik kurva, yaitu sifat-sifat yang tak bergantung pada lokasi. Dengan demikian, persamaan intrinsik kurva mendefinisikan kurva tersebut tidak menetapkan posisi titik relatif terhadap sebuah sistem koordinat. Umumnya persamaan intrinsik dikaitkan dengan sudut singgung θ, waktu t, kelengkungan κ, panjang kurva s, dan torsi τ. Besaran ini disebut **parameter** dari persamaan tersebut.

Misalkan x dan y dinyatakan sebagai fungsi-fungsi dari parameter, misalnya t, oleh persamaan

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad t \in I = [a, b]$$

disebut **persamaan-persamaan parametrik**.) Tiap nilai t menentukan titik (x, y) pada kurva. Jadi, dengan berubahnya nilai t, titik $(x, y) = (f(t), g(t))$ bergerak sepanjang kurva yang disebut **kurva parametrik**.



CONTOH Beri persamaan-persamaan eksplisit, implisit, parametrik garis melalui titik $(1, 2)$ dan $(4, 1)$.

$$\text{Persamaan eksplisit}: y = -\frac{1}{3}(x-1) + 2$$
$$\text{Persamaan implisit}: x + 3y - 7 = 0$$
$$\text{Persamaan parametrik}: x = 1 + 3t, \quad y = 2 - t, \quad -\infty < t < \infty$$

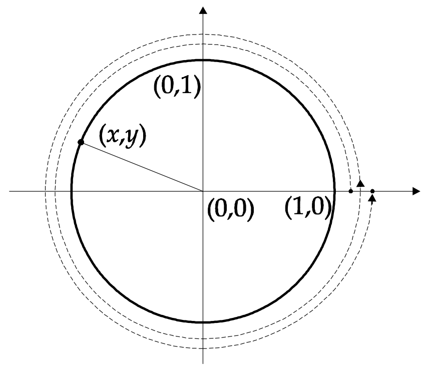
CONTOH Persamaan implisit $x^2+y^2 = 1$ merupakan persamaan untuk lingkaran berpusat di $(0, 0)$ dengan radius 1. Lingkaran ini juga diidentifikasi dengan persamaan parametrik

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Parameter t ini merupakan sudut antara antara garis melalui $(0, 0)$ dan titik (x, y) dengan sumbu-x.
Lingkaran yang sama juga dilalui oleh persamaan parametrik

$$x = \cos 2t, \quad y = \sin 2t, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

tetapi tiap titik dilalui dua kali.



Menggambar grafik

Salah satu tujuan utama adalah membuat sketsa kurva yang diberikan dalam bentuk persamaan parametrik. Metoda yang paling sederhana adalah mencari hubungan antara x dan y, yang biasanya dilakukan dengan melakukan substitusi.

CONTOH Diberikan $x(t) = 2t - 4$ dan $y(t) = t^2 + 1$,

$$\begin{cases} x(t) = 2t - 4 \\ y(t) = 4t^2 + 1 \end{cases}, -1 \leq t \leq 2.$$

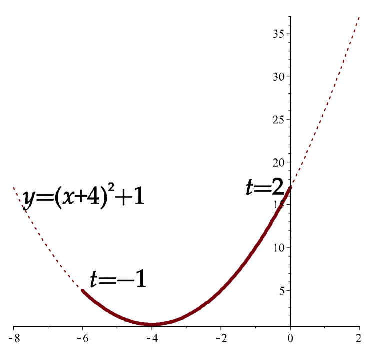
Dari $x = 2t - 4$, diperoleh $t = \frac{x+4}{2}$. Maka

$$y = 4t^2 + 1 = 4\left(\frac{x+4}{2}\right)^2 + 1 = (x+4)^2 + 1.$$

Jadi, kurva merupakan bagian dari parabola $y = (x+4)^2 + 1$. Karena $-1 \leq t \leq 2$, maka

$$-2 \leq 2t \leq 4 \text{ atau} - 6 \leq 2t - 4 \leq 0 \text{ atau } - 6 \leq x \leq 0.$$

Jadi, domain grafik adalah interval $[-2, 0]$.



CONTOH Diberikan $x(t) = t^2 - 1$ dan $y(t) = t^2 + 2$, $-2 \leq t \leq 1$. Hubungan antara x dan y adalah

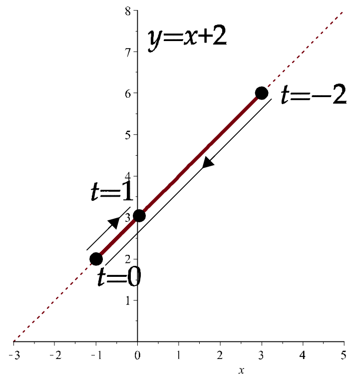
$$y = t^2 + 2 = (x+1) + 2 = x + 3.$$

Jadi, kurva merupakan bagian dari garis $y = x + 3$. Tetapi kurva tidak mencakup seluruh garis karena

$$-2 \leq t \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq t^2 \leq 4$$

sehingga

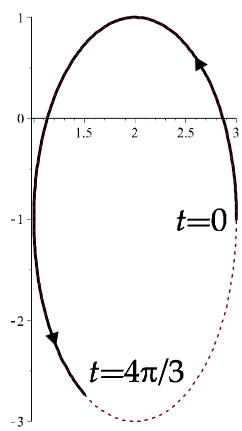
$$-1 \leq x = t^2 - 1 \leq 3.$$



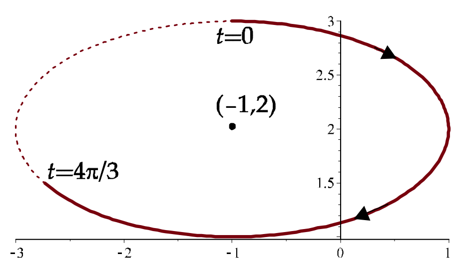
Titik awal adalah $(x(-2), y(-2)) = (3,6)$ dan titik akhir adalah $(x(1), y(1)) = (0,3)$.
CONTOH Diberikan $x(t) = 2 + \cos t$ dan $y(t) = -1 + 2\sin t$, $0 \le t \le \frac{4\pi}{3}$. Karena $x - 2 = \cos t$ dan $\frac{y+1}{2} = \sin t$, diperoleh bahwa

$$1 = \cos^2 t + \sin^2 t = x^2 + \frac{(y+1)^2}{2^2}$$

yang merupakan persamaan ellips berpusat di $(0,-1)$, bergerak dari $(x(0), y(0)) = (3,-1)$ ke $\left(x\left(\frac{4\pi}{3}\right), y\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}, -1-\sqrt{3}\right)$ dengan orientasi berlawanan arah jarum jam.



CONTOH Diberikan $x(t) = -1 + 2\sin t$ dan $y = 2 + \cot t$, $0 \le t \le \frac{4\pi}{3}$. Ini seperti Contoh di atas, hanya dipertukarkan fungsi $x(t)$ dan $y(t)$. Maka kurva ini merupakan elips dengan orientasi searah jarum jam, dari $(-1,3)$ ke $\left(-1-\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$.



CONTOH Berikan persamaan parametrik dari kurva bagian parabola $x = 2 - y^2$ dari $(-2,2)$ ke $(2,0)$. Karena x adalah fungsi dari y, maka yang paling mudah adalah memilih $y = t$. Maka haruslah $0 \le t \le 2$. Dan akibatnya $x = 2 - t^2$. Tetapi kurva persamaan parametrik

$$\begin{cases} x = 2 - t^2 \\ y = t \end{cases}, 0 \le t \le 2.$$

berawal dari $(2,0)$ dan ini tidak sesuai dengan yang diminta soal. Misalkan $y = at + b$. Maka, karena arah dari $(-2,2)$ ke $(2,0)$, haruslah

$$y(0) = 2 \Leftrightarrow y(0) = a0 + b = 2$$
$$y(2) = 0 \Leftrightarrow y(2) = 2a + b = 0$$

Maka diperoleh $b = 2$ dan $a = -1$. Jadi, $y = -t + 2$. Dengan demikian, persamaan paramtrik adalah

$$\begin{cases} x = 2 - (-t+2)^2 \\ y = -t + 2 \end{cases}, 0 \le t \le 2.$$

CONTOH Berikan persamaan parametrik dari kurva bagian parabola $x = 2 - y^2$ dari $(-2,2)$ ke $(2,0)$ dengan $-2 \le t \le 6$. Maka

$$\begin{cases} x = 2 - (g(t))^2 \\ y = g(t) \end{cases}, -2 \le t \le 2.$$

Kita perlu menentukan $g(t)$ yang sesuai yaitu $g(-2) = 2$ dan $g(2) = 0$. Pilih $g(t)$ linear, yaitu $g(t) = at + b$.

$$g(-2) = -2a + b = 2$$
$$g(2) = 2a + b = 6$$

Maka $b = 4$ dan $a = 1$. Jadi, persamaan parametrik yang dimaksud adalah

$$\begin{cases} x = 2 - (t+4)^2 \\ y = t + 4 \end{cases}, -2 \le t \le 2.$$

Kalkulus pada Kurva Parametrik

Misalkan C adalah sebuah kurva yang didefinisikan oleh persamaan parametrik

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, a \le t \le b.$$

Jika f mempunyai inverse pada $[a,b]$, maka $y = g(t) = g\left(f^{-1}(x)\right) = g \circ f^{-1}(x) = F(x)$. Kita ingin menentukan gradien kurva $\frac{dy}{dx}$ dengan menggunakan $f, g, \frac{df}{dt}$, dan $\frac{dg}{dt}$.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dF(x)}{dx} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

Sedangkan

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

dan

$$\frac{d^2y}{dx^2} \neq \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dt^2}}.$$

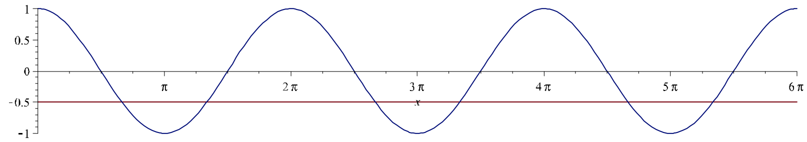
CONTOH Diberikan kurva dengan persamaan parametrik

$$x(t) = t + \cos t, \quad y(t) = t + 2\sin t, \quad 0 \le t \le 6\pi.$$

Tentukan semua titik pada kurva dengan garis singgung **mendatar**. Garis singgung mendatar jika $\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = 0$ yang ekuivalen dengan $g'(t) = 0$ dan $f'(t) \neq 0, 0 \le t \le 6\pi$.. Syarat

$$g'(t) = 1 + 2\cos t = 0, \quad 0 \le t \le 6\pi.$$

memberikan $t = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right), 0 \leq t \leq 6\pi$. Diperoleh enam solusi: $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} + 2\pi, \frac{4\pi}{3} + 2\pi, \frac{2\pi}{3} + 4\pi$, dan $\frac{4\pi}{3} + 4\pi$



dan jelas $f'(t) = 1 - \sin t$ tidak bernilai nol pada semua nilai t tersebut di atas. Karena nilai $x(t)$ berbeda pada ke enam solusi tersebut, maka diperoleh enam titik di mana garis singgung kurva adalah mendatar.
CONTOH Diberikan kurva dengan persamaan parametrik seperti pada Contoh di atas:

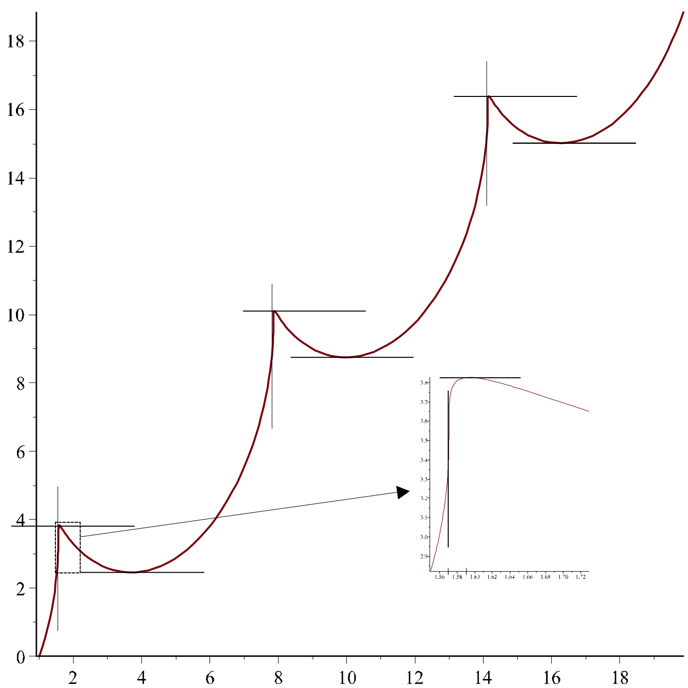
$$x(t) = t + \cos t, \quad y(t) = t + 2\sin t, \quad 0 \leq t \leq 6\pi.$$

Tentukan semua titik pada kurva dengan garis singgung **vertikal**. Garis singgung vertikal jika $\frac{dx}{dy} = \frac{f'(t)}{x'(t)} = 0$ yang ekuivalen dengan $f'(t) = 0$ dan $g'(t) \neq 0$. Syarat

$$f'(t) = 1 - \sin t = 0, \quad 0 \leq t \leq 6\pi.$$

memberikan tiga solusi yaitu $t = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi$, dan $\frac{\pi}{2} + 4\pi$. Jelas $g(t) \neq 0$ pada ketiga nilai tersebut. Maka tiga titik tersebut adalah

$$\left(x\left(\frac{\pi}{2}\right), y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right), \left(x\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right), y\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right)\right), \left(x\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi\right), y\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi\right)\right)$$



Contoh terakhir memberikan ilustrasi kelebihan lain dari penyajiak kurva dengan persamaan parametrik, yaitu dapat memberikan titik-titik dengan garis singgung vertikal, yaitu titik dimana $\frac{dx}{dy} = 0$.