oki neswan (fmipa-itb)

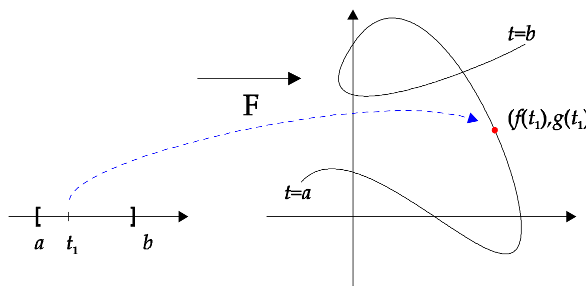
Deret Umum

Sebelumnya telah kita bicarakan persamaan parametrik kurva

$$C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, a \leq t \leq b,$$

dengan f dan g adalah fungsi. Sesungguhnya kurva C berhubungan sebuah fungsi $\mathbf{F}$ dari interval $[a,b]$ ke bidang $\mathbb{R}^2$, yaitu

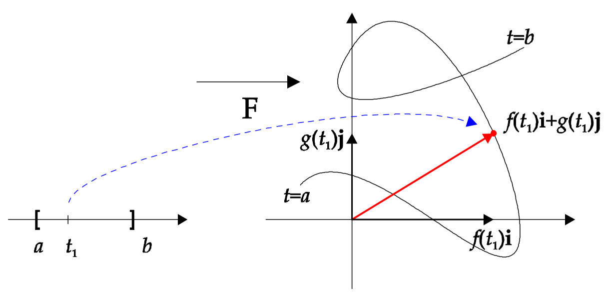
$$\mathbf{F} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$



Kurva dengan persamaan parametrik

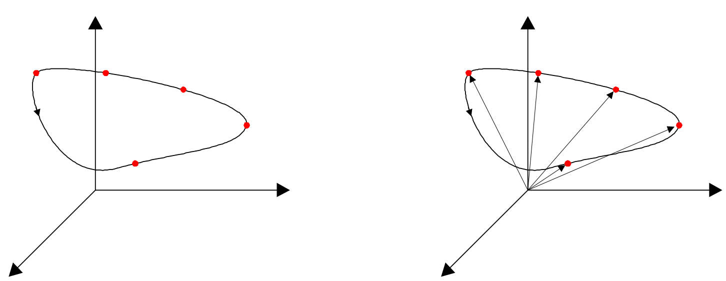
Tiap $t_1 \in [a,b]$ dipetakan oleh fungsi F ke titik $\mathbf{F}(t_1) = (f(t_1), g(t_1)) \in \mathbb{R}^2$. Dengan menggunakan notasi vektor, $(f(t_1), g(t_1)) = f(t_1)\,\mathbf{i} + g(t_1)\,\mathbf{j}$, sehingga

$$\mathbf{F} : t_1 \longmapsto f(t_1)\,\mathbf{i} + g(t_1)\,\mathbf{j}$$



Fungsi bernilai vektor

Fungsi $\mathbf{F}$ ini disebut fungsi bernilai vektor karena keluaran (*output*) fungsinya berupa vektor. Dengan demikian, kita telah sampai pada konsep fungs yang berbeda yaitu fungsi bernilai vektor. Jadi, **persamaan parametrik** dan **fungsi bernilai vektor** ada dua konsep yang sangat erat.



Tentu saja ini juga berlaku untuk vektor pada ruang $\mathbb{R}^3$. Sebagai contoh,

$$\mathbf{F}(t) = (2 - \sin t)\,\mathbf{i} + \left(e^{-t}\cot s\right)\mathbf{j} + (\ln|t|)\,\mathbf{k}, \quad -2 \leq t \leq 4$$

Definition 1 *Fungsi bernilai vektor* $\mathbf{F}(t)$ *adalah fungsi dengan domain* $D \subseteq \mathbb{R}$ *dan daerah nilai* $\mathbb{R}^n$. *Untuk* $n = 3$, *kita dapat menulis* $\mathbf{F}(t)$ *sebagai*

$$\mathbf{F}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$$

dengan fungsi-fungsi f, g, *dan* h *bernilai skalar, disebut fungsi komponen dari* $\mathbf{F}$.

Kalkulus Fungsi Bernilai Vektor

Limit dan Kekontinuan

Limit adalah konsep paling fundamental dari kalkulus. Limit $\lim_{t\to c} \mathbf{F}(t) = \mathbf{L}$ artinya $\mathbf{F}(t)$ dapat dibuat sebarang dekat ke $\mathbf{L}$ jika t cukup dekat ke c. Vektor $\mathbf{L}$ disebut **limit** dari $\mathbf{F}(t)$ di c jika tiap $\varepsilon > 0$, ada $\delta > 0$ sehingga

$$0 < |t - c| < \delta \Longrightarrow \|\mathbf{F}(t) - \mathbf{L}\| < \varepsilon.$$

Limit $\lim_{t\to a} \mathbf{F}(t)$ dapat dihitung melalui limit tiap komponennya.

Theorem 2 (Teorema Limit Fungsi Bernilai Vektor) *Misalkan* $\mathbf{F}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$. *Vektor* $\mathbf{L} = l_1\mathbf{i} + l_2\mathbf{j} + l_3\mathbf{k}$ *adalah limit dari* $\mathbf{F}(t)$ *di* c *jika dan hanya jika*

$$l_1 = \lim_{t\to c} f(t)\,, l_2 = \lim_{t\to c} g(t)\,, l_3 = \lim_{t\to c} h(t)$$

atau

$$\lim_{t\to c} \mathbf{F}(t) = \lim_{t\to c} f(t)\ \mathbf{i} + \lim_{t\to c} g(t)\ \mathbf{j} + \lim_{t\to c} h(t)\ \mathbf{k}$$

CONTOH Hitung $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \left(\left(t^2+1\right)\mathbf{i} + 2\sin t\ \mathbf{j} + 5\cos 3t\ \mathbf{k}\right)$, jika ada. Karena

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \left(t^2+1\right) = \frac{\pi^2}{4} + 1,\ \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} 2\sin t = 2, \quad \text{dan} \ \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} (5\cos 3t) = 5(0) = 0,$$

maka

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \left(\left(t^2+1\right)\mathbf{i} + 2\sin t\ \mathbf{j} + 5\cos 3t\ \mathbf{k}\right) &= \left(\frac{\pi^2}{4}+1\right)\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = \left(\frac{\pi^2}{4}+1\right)\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} \\ &= \left(\frac{\pi^2}{4}+1, 2{,}0\right)\end{aligned}$$

CONTOH Hitung $\lim_{t\to 1} \left(e^{2t}, t+5t^2, \frac{1}{t-1}\right)$, jika ada. Karena $\lim_{t\to 1} \frac{1}{t-1}$ tidak ada, maka $\lim_{t\to 1} \left(e^{2t}, t+5t^2, \frac{1}{t-1}\right)$ tidak ada.

Fungsi $\mathbf{F}(t)$ disebut **kontinu** di c jika $\lim_{t\to c} \mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(c)$. Maka

Theorem 3 *Misalkan* $\mathbf{F}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$. *Fungsi* $\mathbf{F}(t)$ *kontinu di* c *jika dan hanya jika masing-masing komponen kontinu di* c.

$$\lim_{t\to c} f(t) = f(c)\,, \quad \lim_{t\to c} g(t) = g(c)\,, \quad \lim_{t\to c} h(t) = h(c)$$

atau

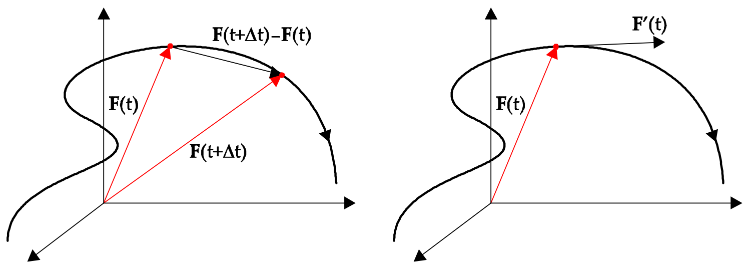
$$\lim_{t\to c} \mathbf{F}(t) = f(c)\ \mathbf{i} + g(c)\ \mathbf{j} + h(c)\ \mathbf{k}$$

SOAL Tentukan semua nilai t sehingga $\mathbf{F}(t) = \left(\tan t, |t-\pi|, \frac{1}{t-2}\right)$ mempunyai kontinu. Jawab: semua t kecuali $\frac{(2k+1)\pi}{2}$ (dengan $k \in \mathbb{Z}$), π, dan 2.

Turunan

Turunan $\mathbf{F}'(t)$ adalah limit berikut jika ada, yaitu

$$\mathbf{F}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{F}(t+\Delta t) - \mathbf{F}(t)}{\Delta t}.$$



Perhatikan bahwa $\mathbf{F}'(c)$ adalah vektor yang menyinggung kurva $C : \mathbf{F}(t)$ di titik $\mathbf{F}(c)$. Jadi, $\mathbf{F}'(c)$ berada sepanjang garis singgung kurva di $t = c$ dan arahnya sesuai dengan orientasi dari kurva.

Berdasarkan Teorema Limit Fungsi Bernilai Vektor, kita peroleh bahwa jika masing-masing komponen mempunyai turunan di t, maka

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{F}(t+\Delta t) - \mathbf{F}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(f(t+\Delta t) - f(t))\ \mathbf{i} + (g(t+\Delta t) - g(t))\ \mathbf{j} + (h(t+\Delta t) - h(t))\ \mathbf{k}}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}\ \mathbf{i} + \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t}\ \mathbf{j} + \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t}\ \mathbf{k} \right) \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}\ \mathbf{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t}\ \mathbf{j} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t}\ \mathbf{k} \\
&= f'(t)\ \mathbf{i} + g'(t)\ \mathbf{j} + h'(t)\ \mathbf{k}
\end{aligned}$$

Theorem 4 (Turunan Limit Fungsi Bernilai Vektor) *Misalkan* $\mathbf{F}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$ *dan semua komponen* $f, g,$ *dan* h *mempunyai turunan di suatu nilai* c *dari* t, *maka*

$$\boxed{\mathbf{F}'(c) = f'(c)\ \mathbf{i} + g'(c)\ \mathbf{j} + h'(c)\ \mathbf{k}}$$

Theorem 5 *Misalkan* $\mathbf{F}(t)$ *dan* $\mathbf{G}(t)$ *mempunyai turunan. Jika fungsi skalar* $f(t)$ *mempunyai turunan dan* k *adalah konstanta, maka*

1. $(\mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t))' = \mathbf{F}'(t) + \mathbf{G}'(t)$
2. $(k\mathbf{F}(t))' = k\mathbf{F}'(t)$
3. $(f(t)\,\mathbf{F}(t))' = f'(t)\,\mathbf{F}(t) + f(t)\,\mathbf{F}'(t)$
4. $(\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{G}(t))' = \mathbf{F}'(t) \cdot \mathbf{G}(t) + \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{G}'(t)$
5. $(\mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t))' = \mathbf{F}'(t) \times \mathbf{G}(t) + \mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}'(t)$
6. $(\mathbf{F}(f(t)))' = \mathbf{F}'(f(t))\,f'(t)$

Misalkan $\mathbf{F}(t)$ sebuah fungsi dengan $\|\mathbf{F}(t)\|$ konstan. Maka $\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}(t)$ konstan dan akibatnya turunannya $\mathbf{F}'(t) \cdot \mathbf{F}(t) + \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}'(t) = 2\mathbf{F}'(t) \cdot \mathbf{F}(t) = 0$. Kita simpulkan $\mathbf{F}'(t) \cdot \mathbf{F}(t) = 0$. Jadi, jika $\|\mathbf{F}(t)\|$ konstan, maka $\mathbf{F}'(t) \perp \mathbf{F}(t)$. Kebalikannya juga berlaku : jika $\mathbf{F}'(t) \perp \mathbf{F}(t)$, maka $\|\mathbf{F}(t)\|$ konstan.

Theorem 6 $\|\mathbf{F}(t)\|$ *jika dan hanya jika* $\mathbf{F}'(t) \perp \mathbf{F}(t)$.

Artinya, dalam hal $\mathbf{F}(t)$ menyatakan posisi benda setiap saat t, jika vektor posisi selalu tegak lurus terhadap vektor kecepatan, maka lintasan benda adalah bagian (atau seluruh) dari lingkaran. yang berpusat di $\mathcal{O}(0,0)$dan juga kebalikannnya. Apakah ini juga berlaku jika lintasan adalah lingkaran yang berpusat di $(a, b) \neq (0, 0)$?

SOAL Tentukan semua nilai t sehingga $\mathbf{F}(t) = \left(\tan t, |t - \pi|, \frac{1}{t-2}\right)$ mempunyai turunan.

Integral

Konsep antiturunan pada fungsi bernilai vektor merupakan perumuman dari konsep untuk fungsi skalar. Fungsi $\mathbf{G}(t)$ disebut **antiturunan** dari $\mathbf{F}(t)$ jika $\mathbf{G}'(t) = \mathbf{F}(t)$. Dengan demikian, untuk tiap vector konstan $\mathbf{C}$, fungsi $\mathbf{G}(t) + \mathbf{C}$ juga merupakan antiturunan dari $\mathbf{F}$. Secagai contoh.

$$\mathbf{G}(t) = \left(e^{2t} + t\right)\mathbf{i} + \left(t^2 \cos t\right)\mathbf{j}$$

adalah antiturunan

$$\mathbf{F}(t) = \left(2e^{2t} + 1\right)\mathbf{i} + \left(2t\cos t - t^2 \sin t\right)\mathbf{j}$$

Demikian pula misalnya

$$\mathbf{G}(t) + (2\mathbf{i} + \pi\mathbf{j}) = \left(e^{2t} + t + 2\right)\mathbf{i} + \left(t^2 \cos t + \pi\right)\mathbf{j}$$

Notasi:

$$\int \mathbf{F}(t)\, dt = \mathbf{G}(t) + \mathbf{C}.$$

$$\begin{aligned} \int \left[\left(2e^{2t} + 1\right)\mathbf{i} + \left(2t\cos t - t^2 \sin t\right)\right]\mathbf{j}dt &= \left[\left(e^{2t} + t\right)\mathbf{i} + \left(t^2 \cos t\right)\mathbf{j}\right] + (C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j}) \\ &= \left(e^{2t} + t + C_1\right)\mathbf{i} + \left(t^2 \cos t + C_2\right)\mathbf{j} \end{aligned}$$

Secara umum

$$\int [f(t)\ \mathbf{i} + g(t)\ \mathbf{j} + h(t)\ \mathbf{k}]\, dt = \left(\int f(t)\, dt + C_1\right)\mathbf{i} + \left(\int g(t)\, dt + C_2\right)\mathbf{j} + \left(\int h(t)\, dt + C_3\right)\mathbf{k}$$

Integral tentu didefinisikan dengan cara serupa,

Definition 7 *Misalkan* $\mathbf{F}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$. *Maka*

$$\boxed{\int_a^b [f(t)\ \mathbf{i} + g(t)\ \mathbf{j} + h(t)\ \mathbf{k}]\, dt = \int_a^b f(t)\, dt\,\mathbf{i} + \int_a^b g(t)\, dt\,\mathbf{j} + \int_a^b h(t)\, dt\,\mathbf{k}}$$