oki neswan (fmipa-itb)

Pecahan Parsial (Partial Fractions)

Diberikan fungsi rasional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Jika $\deg p \geq \deg q$, maka $r(x) = \hat{p}(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$, dengan $\deg r < \deg q$. Maka

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int \hat{p}(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}dx.$$

Integral pertama mudah ditangani. Maka selanjutnya pada masalah integral fungsi rasional

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{p(x)}{q(x)}dx,$$

diasumsikan $\deg p < \deg q$. Kita akan membicarakan integral dalam hal setiap faktor $q(x)$ adalah polinom dengan derajat paling tinggi 2, yaitu linear atau kuadratik. (Ingat faktor x^2 adalah faktor linear berulang dua kali).

Dekomposisi Pecahan Parsial.

Fungsi rasional $\frac{2x-1}{(x+1)(x+2)}$ ditulis sebagai

$$\frac{2x-1}{(x+1)(x+2)^2} = -\frac{3}{x+1} + \frac{3}{x+2} + \frac{5}{(x+2)^2}$$

Ruas kanan disebut **dekomposisi pecahan parsial** dari ruas kiri. Misalkan $\frac{p(x)}{q(x)}$ sebuah fungsi rasional dan $q(x) = (x-a)^m \left(x^2+bx+c\right)^n$. Diasumsikan x^2+bx+c tak tereduksi (tak bisa difaktorkan).. Dekomposisi pecahan parsial dari $p(x)$ adalah ruas kanan dari identitas.

$$\frac{p(x)}{(x-a)^m (x^2+bx+c)^n} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots + \frac{A_m}{x^m} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}. \quad (1)$$

Dengan dekomposisi pecahan parsial, maka masalah integral $\int \frac{p}{q}dx$ diubah menjadi jumlah beberapa integral yang lebih mudah ditangani. Karena x^2+bx+c tak mempunyai akar $(b^2-4c<0)$ maka bentuk kuadrat sempurnanya adalah u^2+d^2,

$$\begin{aligned} x^2+bx+c &= \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}\right)^2 = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\right)^2 \\ &= u^2+d^2, \text{ dengan } u = x+\frac{b}{2} \text{ dan } d = \frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}. \end{aligned}$$

Contoh Tentukan dekomposisi pecahan parsial dari $\frac{x-1}{x^3-x^2-2x}$.

Penyebut x^3-x^2-2x dapat difaktorkan sebagai berikut. $x^3-x^2-2x = x(x+1)(x-2)$. Jadi, ada tiga faktor linear yang tak berulang $(m=1)$. Maka

$$\frac{x-1}{x^3-x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}.$$

Setelah menyamakan penyebut, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x^3-x^2-2x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (C-2B-A)x - 2A}{x(x+1)(x-2)}. \end{aligned}$$

Kesamaan pembilang memberikan

$$x-1=(A+B+C)\,x^2+(C-2B-A)\,x-2A \tag{2}$$

Ada dua cara menentukan koefisien-koefisien A, B, dan C.
Cara 1 Hubungan (2) berlaku untuk tiap x. Maka untuk $x=0$,

$$0-1=A\,(1)\,(-2)+B\,(0)+C\,(0)=-2A$$

yang memberikan $A=\frac{1}{2}$. Dengan cara serupa, untuk $x=-1$ dan $x=2$,

$$-1-1=A\,(0)+B\,(-1)\,(-1-2)+C\,(0)=3B,\ \text{jadi } B=-\frac{2}{3}.$$
$$2-1=A\,(0)+B\,(0)+C\,(2)\,(2+1)=6C,\ \text{jadi } C=\frac{1}{6}$$

Cara 2 Cara lain menentukan A, B, dan C :

$$x-1=A\,(x+1)\,(x-2)+Bx\,(x-2)+Cx\,(x+1)=(A+B+C)\,x^2+(-A-2B+C)\,x-2A$$

Kesamaan koefisien pada kedua ruas memberikan

$$\begin{aligned} A+B+C&=0\\ -A-2B+C&=1\\ -2A&=-1 \end{aligned}$$

Kemudian selesaikan sistem persamaan linear ini untuk memperoleh A, B, dan C. Peroleh

$$A=\frac{1}{2}, B=-\frac{2}{3}, C=\frac{1}{6}.$$

Dengan demikian,

$$\frac{x-1}{x^3-x^2-2x}=\frac{1}{2x}-\frac{2}{3}\frac{1}{(x+1)}+\frac{1}{6}\frac{1}{x-2}.$$

Contoh Tentukan dekomposisi pecahan parsial dari $\frac{1}{x^3+1}$.

Karena $(-1)^3+1=-1+1=0$, maka -1 adalah akar dari x^3+1 atau $(x+1)$ adalah salah satu faktor dari x^3+1. Dengan metoda bagi panjang dapat diperoleh bahwa $x^3+1=(x+1)\left(x^2-x+1\right)$. Faktor x^2-x+1 tak tereduksi karena diskriminannya, $D=(-1)^2-4\,(1)\,(1)=-3<0$. Maka, terdapat A dan B sehingga

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3+1}&=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}=\frac{A\left(x^2-x+1\right)+(Bx+C)\,(x+1)}{(x+1)\,(x^2-x+1)}\\ &=\frac{(A+B)\,x^2+(B-A+C)\,x+(A+C)}{(x+1)\,(x^2-x+1)} \end{aligned}$$

Karena itu pembilang harus sama, yaitu

$$1=(A+B)\,x^2+(B-A+C)\,x+(A+C)\,.$$

Kesamaan ini memberikan

$$\begin{aligned} A+B&=0\\ -A+B+C&=0\\ A+C&=1 \end{aligned}$$

Penyelesaiannya adalah $A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}, C=\frac{2}{3}$. Jadi,

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{\frac{1}{3}}{x+1}+\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}.$$

Contoh Tentukan dekomposisi pecahan parsial dari $\frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2}$.

Dekomposisi pecahan parsial dari $\frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2}$ adalah jumlahan berbentuk $\frac{A}{x}+\frac{B_1x+C_1}{x^2-4x+5}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2-4x+5)^2}$.

$$\frac{x-2}{x\left(x^2-4x+5\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B_1x+C_1}{x^2-4x+5}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2-4x+5\right)^2}.$$

Untuk menentukan semua konstanta,

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{x\left(x^2-4x+5\right)^2}&=\frac{A\left(x^2-4x+5\right)^2+\left(B_1x+C_1\right)(x)\left(x^2-4x+5\right)+\left(B_2x+C_2\right)x}{x\left(x^2-4x+5\right)^2}\\&=\frac{\left(A+B_1\right)x^4+\left(C_1-4B_1-8A\right)x^3+\left(26A+5B_1+B_2-4C_1\right)x^2+\left(5C_1-40A+C_2\right)x+25A}{x\left(x^2-4x+5\right)^2}\end{aligned}$$

Dengan menyamakan koefisien pada kedua ruas, diperoleh,

$$\begin{aligned}A+B_1&=0\\-8A-4B_1-C_1&=0\\26A+5B_1+B_2-4C_1&=0\\-40A+5C_1+C_2&=1\\25A&=-2\end{aligned}$$

Maka diperoleh

$$\begin{aligned}&A=-\frac{2}{25},\quad B_1=-A=\frac{2}{25},\quad C_1=8A+4B_1=-\frac{8}{25},\\&C_2=1+40A-5C_1=1+40\left(-\frac{2}{25}\right)-5\left(-\frac{8}{25}\right)=-\frac{3}{5}\\&B_2=-26A-5B_1+4C_1=-26\left(-\frac{2}{25}\right)-5\left(\frac{2}{25}\right)+4\left(-\frac{8}{25}\right)=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{x\left(x^2-4x+5\right)^2}&=-\frac{\frac{2}{25}}{x}+\frac{\frac{2}{25}x-\frac{8}{25}}{x^2-4x+5}+\frac{\frac{2}{5}x-\frac{3}{5}}{\left(x^2-4x+5\right)^2}\\&=-\frac{2}{25}\frac{1}{x}+\frac{1}{25}\frac{2x-8}{x^2-4x+5}+\frac{1}{5}\frac{2x-3}{\left(x^2-4x+5\right)^2}\end{aligned}$$

Integral Pecahan Parsial

Dari dekomposisi pecahan parsial fungsi rasional (1), kita ketahui bahwa bentuk-bentuk integral yang mungkin muncul adalah

$$\int\frac{dx}{x-a},\quad\int\frac{dx}{(x-a)^n},\quad\int\frac{(ax+b)\,dx}{x+px+q},\quad\int\frac{(ax+b)\,dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}$$

Bila disederhanakan lebih lanjut,

$$\int\frac{dx}{x-a},\ \int\frac{dx}{(x-a)^n},\ \int\frac{xdx}{x^2+px+q},\ \int\frac{dx}{x^2+px+q},\ \int\frac{xdx}{\left(x^2+px+q\right)^n},\ \int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}.$$

Untuk intengral dengan penyebut memuat bentuk kuadratik, lakukan lengkapan kuadratik:

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{2^2}\right)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)^2=u^2+c^2,\quad c>0,n>1.$$

Maka, setelah substitusi, bentuk integral yang terlibat adalah

$$\int \frac{dx}{x-a}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)^n}, \quad \int \frac{udu}{u^2+c^2}, \quad \int \frac{du}{u^2+c^2}, \quad \int \frac{udu}{(u^2+c^2)^n}, \quad \int \frac{du}{(u^2+c^2)^n}.$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x-a} &= \ln|x-a| + C, \quad (\text{substitusi } v = x-a). \\
\int \frac{dx}{(x-a)^n} &= -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C, \quad (\text{substitusi } v = x-a). \\
\int \frac{udu}{u^2+c^2} &= \frac{1}{2}\ln\left|u^2+c^2\right| + C, \quad (\text{substitusi } v = u^2+c^2) \\
\int \frac{udu}{(u^2+c^2)^n} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{(n-1)(u^2+c^2)^{1-n}} + C, \quad (\text{substitusi } v = u^2+c^2) \\
\int \frac{du}{u^2+c^2} &= \frac{1}{c}\tan^{-1}\frac{u}{c} + C
\end{aligned}$$

Sedangkan untuk yang terakhir, gunakan substitusi $u = c\tan t, du = c\sec^2 t dt$,

$$\int \frac{du}{(u^2+a^2)^n} = \int \frac{c\sec^2 t\ dt}{(c^2\sec^2 t)^n} = \frac{1}{c^{2n-1}}\int \frac{dt}{\sec^{2n-2} t} = \frac{1}{c^{2n-1}}\int \cos^{2n-2} t\ dt, (n>1)$$

Integral terakhir adalah integral trigonometri. Diselesaikan dengan substitusi sudut ganda: $\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$.

Contoh Hitunglah $\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}dx$. Karena $\frac{x-1}{x^3-x^2-2x} = \frac{1}{2x} - \frac{2}{3}\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{6}\frac{1}{x-2}$, maka

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}dx &= \int \left(\frac{1}{2x} - \frac{2}{3}\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{6}\frac{1}{x-2}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{(x+1)} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-2} = \frac{\ln|x|}{2} - \frac{2\ln|x+1|}{3} + \frac{\ln|x-2|}{6} + C \\
&= \ln\frac{|x|^{\frac{1}{2}}|x-2|^{\frac{1}{6}}}{|x+1|^{\frac{2}{3}}} + C = \ln\left|\frac{(x)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{6}}}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}\right| + C
\end{aligned}$$

Contoh Hitunglah $\int \frac{dx}{x^3+1}$. Sebelumnya diketahui $\frac{1}{x^3+1} = \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}$. Maka

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{(-x+2)\,dx}{x^2-x+1} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{xdx}{x^2-x+1} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

Lengkapan kuadrat dari x^2-x+1 adalah $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$. Misalkan $u = x - \frac{1}{2}$ dan $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Maka

$$\begin{aligned}
\int \frac{xdx}{x^2-x+1} &= \int \frac{\left(u+\frac{1}{2}\right)du}{u^2+c^2} = \int \frac{udu}{u^2+c^2} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+c^2} = \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|u^2+c^2\right| + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}\tan^{-1}\frac{u}{c}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C_1 \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C_1
\end{aligned}$$

dan

$$\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \int \frac{du}{u^2+c^2} = \frac{1}{c}\tan^{-1}\frac{u}{c} = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C_2.$$

Maka

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3+1} &= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C \\ &= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C\end{aligned}$$

Contoh Hitunglah $\frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2}$. Sebelumnya telah diketahui bahwa $\frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2} = -\frac{2}{25}\frac{1}{x} + \frac{1}{25}\frac{2x-8}{x^2-4x+5} + \frac{1}{5}\frac{2x-3}{(x^2-4x+5)^2}$. Maka

$$\int \frac{(x-2)\,dx}{x\left(x^2-4x+5\right)^2} = -\frac{2}{25}\int\frac{dx}{x} + \frac{1}{25}\int\frac{(2x-8)\,dx}{x^2-4x+5} + \frac{1}{5}\int\frac{(2x-3)\,dx}{\left(x^2-4x+5\right)^2}$$

Lengkapan kuadrat dari x^2-4x+5 adalah $(x-2)^2+(1)^2$. Misalkan $u = x-2$ dan $c = 1$. Maka

$$\begin{aligned}\int \frac{(2x-8)\,dx}{x^2-4x+5} &= \int \frac{(2(u+2)-8)\,du}{u^2+1} = \int\frac{(2u-4)\,du}{u^2+1} = \int\frac{2udx}{u^2+1} - 4\int\frac{dx}{u^2+1} \\ &= \ln\left|u^2+1\right| - 6\tan^{-1}u = \ln\left|x^2-4x+5\right| - 4\tan^{-1}(x-2) + C_1.\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\int \frac{(2x-3)\,dx}{\left(x^2-4x+5\right)^2} &= \int\frac{(2(u+2)-3)\,du}{\left(u^2+1\right)^2} = \int\frac{(2u+1)\,du}{\left(u^2+1\right)^2} = \int\frac{2udu}{\left(u^2+1\right)^2} + \int\frac{du}{\left(u^2+1\right)^2} \\ &= \int\frac{d\left(u^2+1\right)}{\left(u^2+1\right)^2} + \int\frac{du}{\left(u^2+1\right)^2} = -\frac{1}{u^2+1} + \int\frac{d\tan t}{\left(\tan^2 t+1\right)^2}\end{aligned}$$

Integral kedua, dengan $u = \tan t$, adalah

$$\begin{aligned}\int\frac{d\tan t}{\left(\tan^2 t+1\right)^2} &= \int\frac{\sec^2 t dt}{\sec^4 t} = \int\cos^2 t dt = \int\left(\frac{\cos 2t}{2}+\frac{1}{2}\right)dt = \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{t}{2} = \frac{1}{2}\sin t\cos t + \frac{t}{2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\frac{1}{\sqrt{u^2+1}} + \frac{1}{2}\tan^{-1}(x-2) \\ &= \frac{1}{2}\frac{u}{u^2+1} + \frac{1}{2}\tan^{-1}(x-2) = \frac{1}{2}\frac{x-2}{x^2-4x+5} + \frac{1}{2}\tan^{-1}(x-2)\end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned}\int\frac{(2x-3)\,dx}{\left(x^2-4x+5\right)^2} &= -\frac{1}{x^2-4x+5} + \left(\frac{1}{2}\frac{x-2}{x^2-4x+5} + \frac{1}{2}\tan^{-1}(x-2)\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{x-4}{x^2-4x+5} + \frac{1}{2}\tan^{-1}(x-2) + C_2\end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}\int\frac{(x-2)\,dx}{x\left(x^2-4x+5\right)^2} &= -\frac{2}{25}\ln|x| + \frac{1}{25}\left(\ln\left|x^2-4x+5\right| - 4\tan^{-1}(x+2) + C_1\right) + \\ &+ \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\frac{x-4}{x^2-4x+5} + \frac{1}{2}\tan^{-1}(x-2) + C_2\right) \\ &= -\frac{2}{25}\ln|x| + \frac{1}{25}\ln\left|x^2-4x+5\right| - \frac{3}{50}\tan^{-1}(x+2) + \frac{1}{10}\frac{x-4}{x^2-4x+5} + C_3\end{aligned}$$

dengan $C_3 = \frac{C_1}{25} + \frac{C_2}{5}$.

Contoh $\int\frac{\left(x^3-1\right)dx}{x^2(x-2)^3}$. Integrand $\frac{\left(x^3-1\right)}{x^2(x-2)^3}$ didekomposisi menjadi jumlah pecahan parsial

$$\frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)^2} + \frac{B_3}{(x-2)^3}.$$

Maka

$$\begin{aligned}x^3-1&=A_1x\left(x-2\right)^3+A_2\left(x-2\right)^3+B_1x^2\left(x-2\right)^2+B_2x^2\left(x-2\right)+B_3x^2\\&=\left(A_1+B_1\right)x^4+\left(A_2-6A_1-4B_1+B_2\right)x^3+\left(12A_1-6A_2+4B_1-2B_2+B_3\right)x^2+\left(12A_2-8A_1\right)x-8A_2\end{aligned}$$

yang memberikan sistem persamaan linear

$$\begin{aligned}0&=A_1+B_1\\1&=A_2-6A_1-4B_1+B_2\\0&=12A_1-6A_2+4B_1-2B_2+B_3\\0&=12A_2-8A_1\\-1&=-8A_2\end{aligned}$$

Persamaan terakhir memberikan $A_2=\frac{1}{8}$. Gunakan persamaan ke-4 untuk memperoleh $A_1=\frac{12A_2}{8}=\frac{12}{64}=\frac{3}{16}$. Persamaan pertama memberikan $B_1=-A_1=-\frac{3}{16}$. Selanjutnya persamaan ke-2 memberikan

$$B_2=1-A_2+6A_1+4B_1=\frac{5}{4}$$

Maka persamaan ke-3 memberikan

$$\begin{aligned}B_3&=-12A_1+6A_2-4B_1+2B_2\\&=-12\left(\frac{3}{16}\right)+6\left(\frac{1}{8}\right)-4\left(\frac{-3}{16}\right)+2\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{7}{4}\end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned}\frac{x^3-1}{x^2\left(x-2\right)^3}&=\frac{3}{16x}+\frac{1}{8x^2}-\frac{3}{16\left(x-2\right)}+\frac{5}{4\left(x-2\right)^2}+\frac{7}{4\left(x-2\right)^3}\\\int\frac{\left(x^3-1\right)dx}{x^2\left(x-2\right)^3}&=\frac{3}{16}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x^2}-\frac{3}{16}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{5}{4}\int\frac{dx}{\left(x-2\right)^2}+\frac{7}{4}\int\frac{dx}{\left(x-2\right)^3}\\&=\frac{3}{16}\ln|x|+\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{x}\right)-\frac{3}{16}\ln|x-2|+\frac{5}{4}\left(-\frac{1}{x-2}\right)+\frac{7}{4}\left(\frac{-1}{2\left(x-2\right)^2}\right)+C\\&=\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|+\frac{-11x^2+17x-4}{8x\left(x-2\right)^2}+C\end{aligned}$$

Persamaan Diferensial Logistik

Jika $y\left(t\right)$ menyatakan populasi pada saat, Salah satu model yang menggambarkan populasi $y\left(t\right)$ dimana lingkungan mempunyai daya dukung (*carrying capacity*) L adalah

$$y'=ky\left(L-y\right),\quad k>0.$$

Konsep daya dukung mengharuskan populasi y turun jika $y>L$ dan y akan naik jika $y<L$. Kedua syarat ini dipenuhi oleh persamaan diferensial di atas. Persamaan diferensial di atas memberikan

$$\begin{aligned}\frac{dy}{y\left(L-y\right)}&=kdt\\\int\frac{dy}{y\left(L-y\right)}&=\int kdt=kt+C.\end{aligned}$$

Integral pada ruas kiri merupakan integral fungsi rasional $\frac{1}{y(L-y)}$. Dekomposisi pecahan parsialnya adalah $\frac{1}{L}\frac{1}{(L-y)}+\frac{1}{L}\frac{1}{y}$. Maka

$$\begin{aligned}\int\frac{dy}{y\left(L-y\right)}&=\frac{1}{L}\int\left(\frac{1}{L-y}+\frac{1}{y}\right)dy=\frac{1}{L}\left(\int\frac{dy}{L-y}+\int\frac{dy}{y}\right)=\frac{1}{L}\left(-\ln|L-y|+\ln|y|\right)\\&=-\frac{1}{L}\ln|L-y|+\frac{1}{L}\ln y=\frac{1}{L}\ln\left|\frac{y}{L-y}\right|\end{aligned}$$

Maka

$$\frac{1}{L}\ln\left|\frac{y}{L-y}\right| = kt + C$$
$$\left|\frac{y}{L-y}\right| = e^{Lkt} \times e^{LC} = Ae^{Lkt},$$

Maka

$$\frac{y}{L-y} = Ae^{Lkt} \quad \text{dengan } A = \pm e^{LC}$$

Untuk memperoleh ungkapan eksplisit dari y,

$$y = (L-y)\,Ae^{Lkt} = ALe^{Lkt} - yAe^{Lkt}$$
$$y + yAe^{Lkt} = ALe^{Lkt}$$
$$.$$

Maka

$$y(t) = \frac{L}{1+Ae^{-Lkt}}$$

dan perhatikan bahwa

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = L$$

Contoh Misalkan diketahui $y' = 3\times 10^{-4} y\,(2000-y)$. Maka $k = 3\times 10^{-4}$ dan $L = 2000$. Jika $y(0) = 800$, maka $800 = \frac{2000}{1+A}$. Selesaikan untuk memperoleh $A = \frac{3}{2}$. Jadi,

$$y_1(t) = \frac{2000}{1+\frac{3}{2}e^{-0.6t}}$$

Fungsi $y_1(t)$ adalah solusi persamaan diferensial logistik untuk nilai awal $y(0) = 800$.
Jika $y(0) = 2500$, maka $2500 = \frac{2000}{1+A}$. Selesaikan untuk memperoleh $A = -\frac{1}{5}$. Jadi,

$$y_2(t) = \frac{2000}{1-\frac{1}{5}e^{-0.6t}}$$