KALKULUS VISUAL BAGIAN II

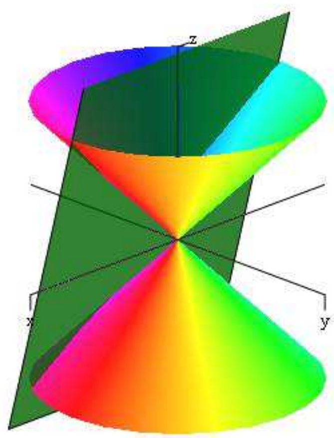
DIKTAT PENDUKUNG KULIAH

MA1202 MATEMATIKA 2B

Penyusun:

Drs. Warsoma Djohan M.Si.

Warsoma Djohan



Irisan Kerucut, property of WD2011

Program Studi Matematika, Fakultas MIPA

Institut Teknologi Bandung

Januari 2015

Kata Pengantar

MATEMATIKA merupakan matakuliah wajib tingkat pertama bagi hampir semua Program Studi dan Sekolah di Institut Teknologi Bandung. Berdasarkan kebutuhan yang berbeda pada berbagai Program Studi yang ada, mulai tahun ajaran 2004 perkuliahan Matematika dibagi menjadi dua macam yaitu **Matematika A** (4 kredit) dan **Matematika B** (3 kredit). Perlu diperhatikan, materi Matematika 2B bukan merupakan subset dari materi Matematika 2A. Untuk itu, penulis mengembangakn diktat untuk masing-masing Matematika 2A dan 2B secara terpisah.

Diktat ini mulai disusun sejak tahun 2004. Pada awalnya materi disusun dalam bentuk beningan/transparency. Tujuannya adalah untuk meningkatkan proses pembelajaran, dengan cara menyediakan bahan kuliah yang berisi ringkasan teori dan soal-soal latihan terpilih. Dengan adanya beningan ini diharapkan proses pencatatan yang banyak dilakukan pada perkuliahan konvensional bisa dikurangi. Dengan demikian, waktu yang tersedia dapat digunakan dengan lebih efektif untuk kegiatan ceramah dan diskusi.

Diktat ini selalu direvisi secara kontinu dan disesuaikan dengan kebutuhan yang ada. Perkembangan peralatan multimedia saat ini memungkinkan konstruksi tampilan konsep-konsep matematika secara visual melalui bantuan komputer. Hal ini akan sangat membantu proses belajar mahasiswa, karena konsep-konsep yang rumit dan abstrak dapat diperlihatkan secara kongkrit melalui program animasi. Sejalan dengan perubahan ini, mulai tahun ajaran 2011 judul diktat ini diubah menjadi "Kalkulus Visual". Melalui mekanisme ini diharapkan para mahasiswa dapat memahami konsep-konsep yang ada dengan lebih cepat dan lebih mudah. Pada diktat ini, bagian yang memuat animasi ditandai dengan ikon berbentuk ♠ atau *Animation*. Cara menampilkan animasinya adalah dengan meng-klik tombol *mouse* pada ikon tersebut.

Untuk dapat memanfaatkan diktat ini secara efektif diperlukan beberapa perangkat lunak pendukung, yaitu: Adobe Acrobat Reader versi 9 atau lebih baru dan Quick Time player. Semua perangkat lunak tersebut bersifat *public domain/free* dan dapat diunduh/didownload via internet. Untuk memudahkan, penulis telah menempatkan diktat kuliah beserta perangkat lunak pendukung tersebut pada *ftp server* dengan alamat ***ftp://167.205.6.17*** atau ***ftp://ftp2.math.itb.ac.id***. Gunakan *login-name: anonymous, password: anonymus*. Diktat Matematika 2A dan Matematika 2B, masing-masing tersimpan di dalam folder ***BahanKuliah/Warsoma/2015 MA1201 Matematika 2A*** dan ***BahanKuliah/Warsoma/2015 MA1201 Matematika 2B***, sedangkan perangkat pendukungnya berada dalam folder ***BahanKuliah/Warsoma/Software***

Pendukung. Tatacara instalasi dan penggunaan diktat ini pada komputer anda dijelaskan pada file —**readme1st.doc**.

Catatan:

- Sesuai dengan kebijakan dari pihak pengelola internet di ITB, semua *ftp-server* di ITB hanya dapat diakses dari dalam kampus ITB.
- Akses dari luar kampus ITB masih dimungkinkan melalui fasilitas Virtual Private Network (VPN). Akses ini hanya dapat digunakan oleh mereka yang mempunyai *account* internet di ITB.
- Untuk dapat memastikan tampilan animasi yang ada berjalan dengan benar, semua file PDF yang ada harap dibuka menggunakan *Adobe Acrobat Reader*. Sejauh ini kelengkapan yang ada di *PDF reader* yang lain belum sepenuhnya mendukung fasilitas yang diperlukan oleh diktat ini.

Sebagai penutup, Penulis mengucapkan terima kasih kepada rekan-rekan Dosen yang telah memberikan masukan terhadap pengembangan diktat ini, diantaranya kepada Dr. Wono Setya Budhi, Prof. Dr. Hendra Gunawan, Prof. Dr. Edy Tri Baskoro, Dr. Sri Redjeki, serta Drs Koko Martono M.Si. Semoga diktat ini dapat berguna untuk meningkatkan kualitas pembelajaran Kalkulus.

Januari 2015,

Penyusun,

Warsoma Djohan

Teknik Pengintegralan

Sejauh ini, kita telah membahas fungsi-fungsi elementer dengan cukup lengkap. Fungsi-fungsi tersebut terdiri dari fungsi aljabar, bentuk akar dan harga mutlak, fungsi eksponen, fungsi logaritma, fungsi trigonometri, fungsi invers trigonometri, fungsi hiperbol dengan inversnya, dan kombinasi antara fungsi-fungsi tersebut.

Proses untuk mencari turunan dari fungsi-fungsi tersebut 'relatif mudah' karena telah ada aturan yang lengkap untuk mengevaluasinya. Berlainan dengan menghitung turunan, proses sebaliknya, yaitu mencari anti turunan / integral dari sebuah fungsi merupakan proses yang jauh lebih sukar. Beberapa fungsi seperti $f(x) = e^{x^2}$ bahkan tidak memiliki anti turunan.

Pada pembahasan sebelumnya telah diperkenalkan teknik substitusi untuk mencari anti turunan. Teknik ini hanya dapat diterapkan pada sekelompok fungsi tertentu. Pada bagian ini akan dikembangkan beberapa teknik baru untuk menentukan anti turunan dari suatu fungsi.

Berikut ini disajikan rumus-rumus dasar anti turunan yang diperoleh langsung dari pembahasan konsep turunan pada bab-bab sebelumnya.

1. $\displaystyle\int k\,du = ku + c$
2. $\displaystyle\int u^r\,du = \begin{cases} \frac{u^{r+1}}{r+1} + c & r \neq 1 \\ \ln|u| + c & r = 1 \end{cases}$
3. $\displaystyle\int e^u\,du = e^u + c$
4. $\displaystyle\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + c \qquad a \neq 1,\ a > 0$
5. $\displaystyle\int \sin u\,du = -\cos u + c$
6. $\displaystyle\int \cos u\,du = \sin u + c$
7. $\displaystyle\int \sec^2 u\,du = \tan u + c$
8. $\displaystyle\int \csc^2 u\,du = -\cot u + c$
9. $\displaystyle\int \sec u\ \tan u\,du = \sec u + c$
10. $\displaystyle\int \csc u\ \cot u\,du = -\csc u + c$
11. $\displaystyle\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + c$ ♠
12. $\displaystyle\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + c$

Pengintegralan dengan Metode Substitusi

Pada metode ini, sebagian suku dari integran (fungsi yang diintegralkan) disubstitusikan menjadi variabel baru. Substitusi ini diatur agar bentuk integral semula berubah menjadi salah satu dari 15 bentuk integral di atas. Selanjutnya setelah diperoleh hasil integralnya, kita kembalikan variabel baru tersebut ke variabel semula.

Contoh-Contoh:

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2(x^2)}\,dx$
2. $\displaystyle\int \frac{6e^{1/x}}{x^2}\,dx$
3. $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^4+11}\,dx$
4. $\displaystyle\int \frac{a^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$
5. $\displaystyle\int \sec x\,dx$
6. $\displaystyle\int \csc x\,dx$
7. $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$
8. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$
9. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x-2}\,dx$

Pengintegralan Parsial

Pengintegralan parsial merupakan sebuah teknik di mana fungsi yang akan diintegralkan berasal dari perkalian dua buah fungsi. Untuk memperoleh rumus integral parsial, perhatikanlah proses berikut. Misalkan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$ dua buah fungsi.

$$\frac{d(uv)}{dx} = u'v + uv'$$

$$d(uv) = u'v\,dx + uv'\,dx$$

$$uv = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx$$

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx \quad \text{atau} \quad \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Contoh-Contoh:

1. $\int x \cos x\,dx$ ♠
2. $\int_1^2 \ln x\,dx$ ♠
3. $\int x^2 \sin x\,dx$ ● ●
4. $\int e^x \sin x\,dx$ ●
5. $\int \sec^3 x\,dx$ ♠

Pengintegralan Fungsi Rasional

Pada pasal ini akan dibahas integral berbentuk

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \quad \text{dengan } P(x), Q(x) \text{ polinom.}$$

Contoh: Tentukan $\displaystyle\int \frac{x^5+2x^3-x+1}{x^3+5x}\,dx$

Sebelum kita lakukan proses integrasi, hal pertama yang harus diperhatikan adalah derajat dari pembilang dan penyebut. Bila derajat pembilang 'lebih besar atau sama dengan' derajat penyebut, lakukan dahulu proses pembagian polinom. Untuk contoh di atas, bila dilakukan pembagian polinom maka diperoleh:

$$\frac{x^5+2x^3-x+1}{x^3+5x} = x^2-3+\frac{14x+1}{x^3+5x}$$

Jadi, $\displaystyle\int \frac{x^5+2x^3-x+1}{x^3+5x}\,dx = \int (x^2-3)\,dx + \int \frac{14x+1}{x^3+5x}\,dx$

Suku pertama pada ruas kanan mudah untuk diintegralkan karena berupa polinom. Permasalahan tinggal pada suku kedua yang berupa fungsi rasional. Dengan demikian, untuk selanjutnya pembahasan cukup kita batasi pada masalah integral fungsi rasional dengan derajat pembilang lebih kecil dari derajat penyebut.

Pada beberapa soal, integral fungsi rasional dapat diselesaikan dengan substitusi sederhana. Misalnya $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x}{2x^3-5x^2+6}\,dx$ dapat kita selesaikan dengan mudah memakai substitusi $u = 2x^3-5x^2+6$.

Untuk selanjutnya kita akan membahas integral fungsi rasional secara bertahap serta teknik-teknik penyelesaiannya.

Bentuk 1: Pembilang konstanta, penyebut terdiri dari satu faktor linear dengan multiplisitas $m \geq 1$.

$$\int \frac{1}{(ax+b)^m}\,dx \qquad \text{gunakan substitusi } u = ax + b$$

Contoh: (a) $\displaystyle\int \frac{2}{(2x+1)^3}\,dx$ ♠ (b) $\displaystyle\int \frac{2}{3x+5}\,dx$ ●

Bentuk 2: Pembilang polinom derajat $\geq$ 1, penyebut terdiri dari satu faktor linear dengan multiplisitas m. Integran tersebut kita uraikan atas suku-suku sebagai berikut:

$$\frac{p(x)}{(ax+b)^m} = \frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(ax+b)^m}$$

Perhatikan bahwa setiap suku pada ruas kanan merupakan bentuk 1.

Contoh: $\displaystyle\int \frac{x-3}{(x-1)^2}\,dx$ ♠

Bentuk 3: Penyebut terdiri dari beberapa faktor linear dengan multiplisitas satu. Pada bentuk ini kita lakukan penguraian sebagai berikut,

$$\frac{S(x)}{(x-x_1)\,(x-x_2)\,\cdots\,(x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-x_2}$$

Setiap suku pada ruas kanan merupakan bentuk 1.

Contoh: (a) $\displaystyle\int \frac{7}{(2x-1)(x+3)}\,dx$ ♠ (b) $\displaystyle\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}\,dx$ ●

Bentuk 4: Penyebut terdiri dari faktor-faktor linear dengan multiplisitas boleh lebih dari satu. Masing-masing faktor kita uraikan mengikuti aturan pada bentuk 2 dan bentuk 3. Hasilnya adalah integran dengan suku-suku seperti bentuk 1.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-11x+15}{(x-2)^2\,(x+1)} &= \frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x+1} \\
\frac{x^2-11x+15}{(x-2)^2\,(x+1)} &= \frac{A(x-2)(x+1)+B(x+1)+C(x-2)^2}{(x-2)^2(x+1)} \\
x^2-11x+15 &= A(x-2)(x+1)+B(x+1)+C(x-2)^2
\end{aligned}$$

Substitusikan secara beruntun nilai-nilai $x=2$, $x=-1$ dan $x=0$ pada persamaan di atas, maka diperoleh $B=-1$, $C=3$ dan $A=-2$. Jadi

$$\frac{x^2-11x+15}{(x-2)^2\,(x+1)} = \frac{-2}{x-2}+\frac{-1}{(x-2)^2}+\frac{3}{x+1}$$

Contoh: (a) $\int \frac{8x^2+5x-8}{(2x-1)^2(x+3)}\,dx$ ♠ (b) $\int \frac{3x^5+17x^4+9x^3-64x^2-30x+1}{(x-1)^2(x-2)(x+3)^3}\,dx$ •

Bentuk Tak tentu Limit

Perhatikan tiga buah limit berikut:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-x-6} \qquad \text{(c)} \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Bila masing-masing titik limitnya disubstitusikan, semuanya menghasilkan bentuk $\frac{0}{0}$. Namun demikian, bila dihitung, nilai limit dari ketiga contoh tersebut berbeda-beda. Bentuk seperti ini dinamakan bentuk tak tentu.

Pada beberapa bab sebelumnya kita telah mempelajari berbagai metode yang dapat diterapkan untuk menghitung bentuk tak tentu di atas. Pada pasal ini, akan disajikan metode lain yang relatif mudah untuk mengevaluasi limit tersebut.

Aturan L'Hopital 1: Misalkan $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

Bila $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ada (boleh tak hingga) maka $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Contoh: Tentukan limit-limit berikut:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ ♠ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$ ♠ (c) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2+3x-10}{x^2-4x+4}$ ♠

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{\ln(1+x)}$ ● (e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ ♠ (f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2+3x}$ ●

(h) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^{-x}}{x^{-1}}$ ●

Aturan L'Hopital 2: Misalkan $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \lim\limits_{x\to a} |g(x)| = \infty$.

Bila $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ada (boleh takhingga) maka $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Contoh: Tentukan limit-limit berikut:

(a) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x}{e^x}$ ♠ (b) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^a}{e^x}, \quad a>0$ ♠

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x^a} \quad a>0$ ● (d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x}$ ●

Bentuk Tak Tentu $0 \cdot \infty$.

Bentuk ini diubah jadi bentuk $\frac{0}{\frac{1}{\infty}}$ atau $\frac{\infty}{\frac{1}{0}}$

Contoh: Tentukan $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x \cdot \ln(\sin x)$. ♠

Bentuk Tak Tentu $\infty - \infty$.

Bentuk ini umumnya merupakan fungsi pecahan dikurangi fungsi pecahan lain. Untuk menyelesaikannya, kita samakan penyebutnya. Selanjutnya akan diperoleh bentuk $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$

Contoh: Tentukan $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$. ♠

Catatan: Bentuk-bentuk berikut merupakan bentuk tentu

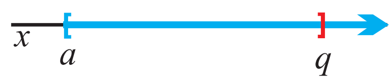
$\frac{0}{\infty}$, $\frac{\infty}{0}$, $\infty + \infty$, $\infty \cdot \infty$, 0^{∞}, ∞^{∞}

Integral Tak Wajar Jenis 1 : batas ∞

Di bagian depan kita telah mendefinisikan pengertian integral tentu sebagai limit jumlah Riemann. Konsep integral tentu ini didefinisikan pada sebuah interval tutup $[a, b]$, dengan $a, b \in \mathbb{R}$. Pada pasal ini akan diperluas arti sebuah integral tentu, bila interval tersebut tak terbatas. Berikut ini disajikan definisi dari integral tak wajar jenis 1, yaitu dengan batas ∞.

a. $$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{b} f(x)\,dx$$

b. $$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{q\to\infty} \int_{a}^{q} f(x)\,dx$$



c. $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$$

Catatan:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \neq \lim_{t\to-\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx$$

Bila suku-suku di ruas kanan nilainya berhingga, dikatakan integral tak wajar tersebut *konvergen* dan nilainya adalah hasil di ruas kanan.

Contoh:

1. Tentukan (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \sin x\,dx$

2. R merupakan daerah yang dibatasi oleh grafik $f(x) = \frac{1}{x}$, garis $x = 1$ dan sumbu x. Tentukan volume benda yang terbentuk bila:
   (a) R diputar terhadap sumbu x (b) R diputar terhadap sumbu y

3. Carilah semua nilai p supaya $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergen.

Integral Tak Wajar Jenis 2: Integran Tak Hingga

Perhatikan hitungan berikut: $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-2}^{1} = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

Hasil ini tidak wajar, sebab $f(x) = \frac{1}{x^2}$ fungsi yang positif, jadi hasil integralnya seharusnya positif juga. Ketidakwajaran ini disebabkan $f(x)$ tidak terdefinisi di $x = 0 \in [-2, 1]$. Integral seperti ini disebut integral tak wajar jenis 2. Perhitungannya tidak boleh langsung menerapkan Teorema Dasar Kalkulus Pertama. Berikut disajikan integral tak wajar jenis 2 serta definisi perhitungannya.

a. Misalkan $\displaystyle\lim_{x\to a^+} |f(x)| = \infty$, maka $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$

b. Misalkan $\displaystyle\lim_{x\to b^-} |f(x)| = \infty$, maka $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{q\to b^-} \int_a^q f(x)\,dx$

c. Misalkan $f(x)$ kontinu pada $[a, b]$ kecuali di $c \in [a, b]$,

maka $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Contoh-Contoh:

1. Periksa kekonvergenan $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$
2. Carilah semua nilai p supaya $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergen.
3. Periksa kekonvergenan (a) $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx$

Aproksimasi Polinom Taylor untuk Fungsi

Dalam perhitungan matematika, terutama untuk fungsi-fungsi transenden, sering sekali dijumpai kesukaran dalam menghitung nilai fungsi tersebut. Sebagai contoh, $\sin(\frac{\pi}{7})$, $\sqrt{4,1}$, $\log_2 7$, dan lain-lain. Bila kita hitung nilainya menggunakan kalkulator/komputer, maka yang diperoleh adalah nilai hampirannya. Ada berbagai macam teknik hampiran yang dapat digunakan, namun prinsip dasarnya menggunakan polinom. Penggunaan polinom sebagai fungsi hampiran didasarkan dua alasan berikut:

- Setiap fungsi kontinu selalu dapat dihampiri oleh polinom
- Nilai sebuah polinom selalu mudah untuk dihitung

Pada pasal ini akan dibahas hampiran menggunakan polinom Taylor.

Untuk mendapatkan gambaran intuitif, perhatikanlah animasi di bawah ini. Pada animasi tersebut, fungsi $f(x) = x^2 \sin(x)$ dihampiri secara berturutan oleh polinom derajat 1, 2, 4 dan 8. Semakin tinggi derajat polinom yang digunakan, hampiran tersebut terlihat semakin baik.

Click pada gambar di atas untuk menampilkan hampiran Taylor berbagai orde.

Tekan terus tombol mouse untuk menghentikan animasi sementara waktu

Aproksimasi Linear / Polinom Taylor derajat satu

Misalkan $f(x)$ sebuah fungsi yang dapat diturunkan pada interval buka I yang memuat titik a. Akan dikonstruksikan polinom derajat satu yang menghampiri $f(x)$ sebagai berikut:

$$f(x) \approx p_1(x) = c_0 + c_1(x-a) \tag{1}$$

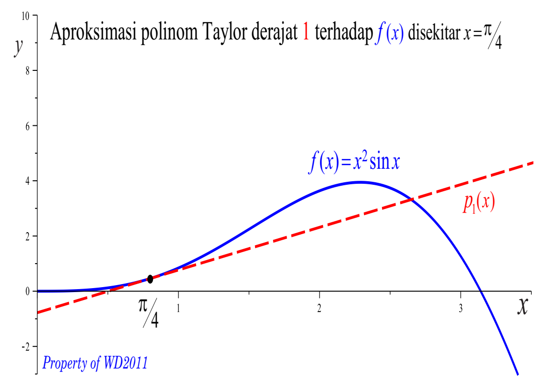
Pada masalah ini, kita harus menentukan nilai c_0 dan c_1 agar hampiran tersebut 'baik', artinya polinom $p_1(x)$ 'dekat' dengan fungsi $f(x)$. Kriteria yang digunakan adalah:

$$f(a) = p_1(a) \qquad \text{dan} \qquad f'(a) = p_1'(a)$$

Substitusikan masing-masing kriteria di atas pada persamaan (??) maka akan diperoleh $c_0 = f(a)$ dan $c_1 = f'(a)$.

$p_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

Polinom $p_1(x)$ disebut hampiran Taylor derajat 1 dari $f(x)$ disekitar titik $x = a$.



Contoh: Hampiri nilai $\ln(0,9)$ dengan polinom Taylor derajat satu.
Nilai "eksaknya", $\ln(0.9) = -0,1053605156578263012$

Aproksimasi kuadrat / Polinom Taylor derajat dua

Pada hampiran Taylor derajat satu, terlihat bahwa untuk titik yang jauh dari titik a, nilai hampirannya kurang baik. Salah satu upaya perbaikannya adalah dengan meningkatkan derajat dari polinom yang digunakan. Untuk itu kita akan membahas hampiran Taylor derajat dua.

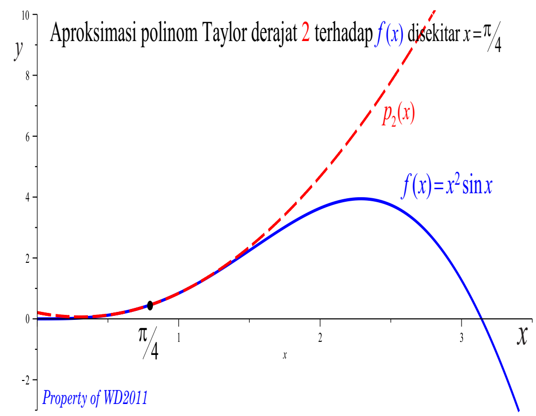
$$f(x) \approx p_2(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 \tag{2}$$

Kita harus menentukan koefisien c_0, c_1 dan c_2. Kriteria yang digunakan adalah: $f(a) = p_2(a), \quad f'(a) = p_2'(a) \quad f''(a) = p_2''(a)$

Substitusikan masing-masing kriteria di atas pada persamaan (??) maka akan diperoleh $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, dan $c_2 = \frac{f''}{2!}$.

$$p_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''}{2!}(x-a)^2$$

Polinom $p_2(x)$ disebut hampiran Taylor derajat 2 dari $f(x)$ disekitar titik $x = a$.



Contoh: Hampiri nilai $\ln(0,9)$ dengan polinom Taylor derajat dua. ♠
Nilai "eksaknya", $\ln(0.9) = -0,105360515657826 30123$

Aproksimasi Polinom Taylor derajat n

Bentuk umum polinom Taylor derajat n untuk menghampiri $f(x)$ adalah:

$$f(x) \approx p_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n \quad (3)$$

dengan kriteria

$$f(a) = p_2(a), \quad f'(a) = p_2'(a) \quad f''(a) = p_2''(a), \cdots f^{(n)}(a) = p_n^{(n)}(a)$$

Substitusikan masing-masing syarat tersebut pada (??), maka diperoleh:

$$c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a), \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \quad \cdots, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Jadi, bentuk umum hampiran polinom Taylor orde n dari fungsi $f(x)$ disekitar titik a adalah:

$$f(x) \approx p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Hal khusus, bila $a = 0$ maka $p_n(x)$ disebut polinom Maclaurin:

$$f(x) \approx p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Soal-Soal:

1. Hampiri nilai $\ln(0,9)$ dengan polinom Taylor derajat empat. ♠

2. Tuliskan polinom Maclaurin orde n dari $f(x) = e^x$.

Galat/Error/Kesalahan

Galat adalah perbedaan nilai dari suatu besaran dengan nilai hampirannya.

ilustrasi: $\cos(0,2) \approx 1 - \frac{1}{2!}(0,2)^2 + \frac{1}{4!}(0,2)^4 \approx 0,9800667$

galat metode (galat pemotongan) galat perhitungan (galat pembulatan)

Galat pemotongan terjadi karena adanya pemotongan rumus matematika tertentu, sedangkan galat pembulatan diakibatkan karena keterbatasan penyimpanan bilangan pada alat hitung kita.

Perlu diperhatikan, **walaupun hasil hitungan numerik selalu berupa hampiran**, bila sumber galatnya hanya galat pemotongan, maka **kita dapat mengatur besar galat yang terjadi sesuai dengan kebutuhan**. Hal ini dijamin oleh rumus berikut:

Rumus Sisa Taylor

Misalkan $f(x)$ fungsi yang dapat diturunkan sampai $(n+1)$ kali disekitar titik a, maka

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

dengan $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, c diantara x dan a (suku sisa Taylor)

Secara umum nilai $R_n(x)$ tidak diketahui, tetapi *batas atasnya* dapat dicari. Semakin besar n yang digunakan umumnya $R_n(x)$ makin kecil, mengapa?

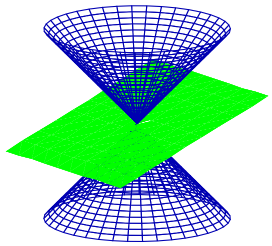
Latihan:

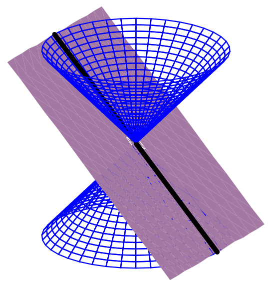
1. Taksirlah batas galatnya bila $\ln(0,9)$ dihampiri dengan $p_4(x)$. ♠
2. Hampiri $e^{0,8}$ dengan galat tidak melebihi 0,001 ●
3. Galat suatu hasil perhitungan numerik adalah E $= |\frac{c^2 - \sin c}{c}|$ dengan $2 \leq c \leq 4$. Taksirlah batas maksimum galat tersebut. ●

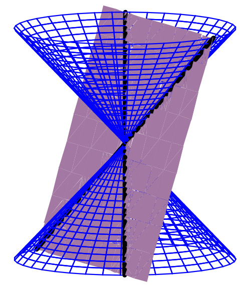
Irisan Kerucut

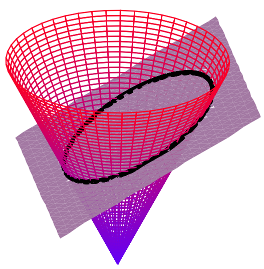
animation 1 animation 2

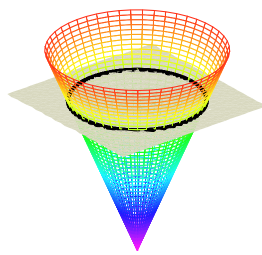
Irisan kerucut adalah kurva yang terbentuk dari perpotongan antara sebuah kerucut dengan bidang datar. Kurva irisan ini dapat berupa satu titik, satu garis lurus, dua garis lurus yang berpotongan, elips, lingkaran, parabola dan hiperbola.

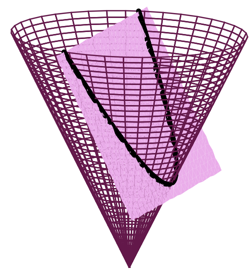

Titik

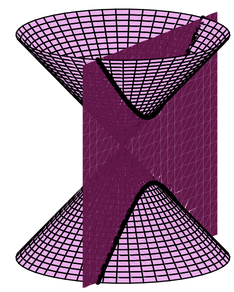

Satu garis


Sepasang garis

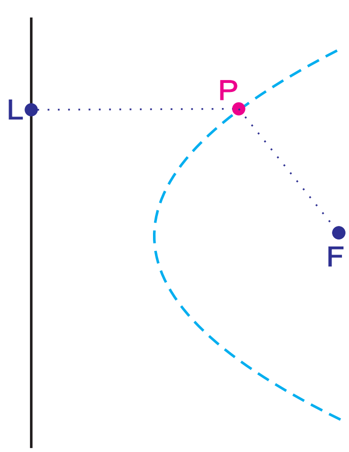

Elips


Lingkaran


Parabola


Hiperbola

Irisan kerucut yang berupa elips/lingkaran, parabola dan hyperbola disebut **Conic**. Secara umum conic dapat diformulasikan sebagai berikut:



Perhatikan sebuah garis lurus dan sebuah titik F diluar garis tersebut. Conic adalah "kumpulan semua titik P yang bersifat $\frac{\overline{PF}}{\overline{PL}} = k$ dengan k suatu konstanta. Kumpulan titik-titik ini berbentuk kurva di bidang.

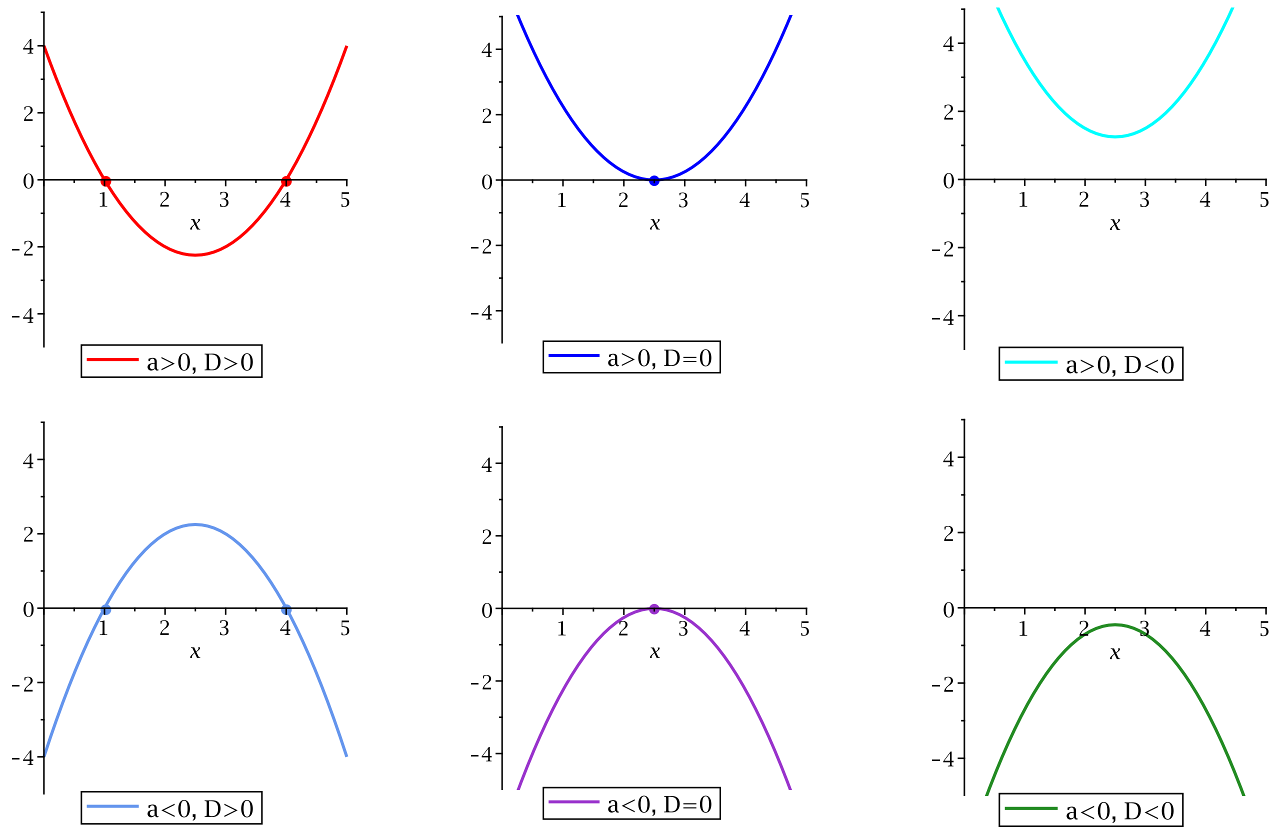
- Elips : conic dengan $0 < k < 1$
- Parabola : conic dengan $k = 1$
- Hiperbola : conic dengan $k > 1$

Penurunan rumus Conic dalam bentuk persamaan x dan y dapat dilihat pada buku-buku kalkulus.

Parabola

Bentuk umum : $y = ax^2 + bx + c$ dengan $a, b,$ dan, c konstanta.

Berikut disajikan grafik dari parabola untuk berbagai nilai $a, b,$ dan, c.



Pada gambar di atas, $D = b^2 - 4ac$, disebut diskriminan.

Puncak parabola adalah $(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$.

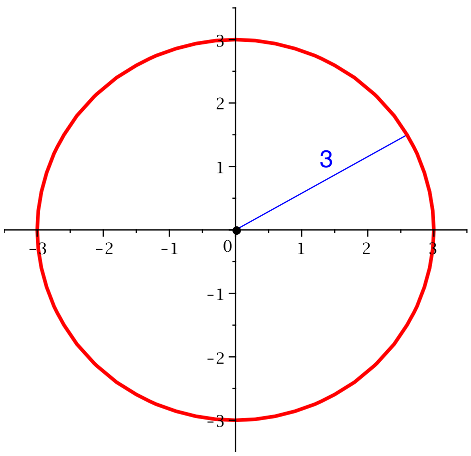
Catatan: Persamaan parabola dapat pula berbentuk $x = ay^2 + by + c$. Grafiknya berbentuk parabola yang membuka ke arah sumbu x positif atau sumbu x negatif.

Elips & Lingkaran

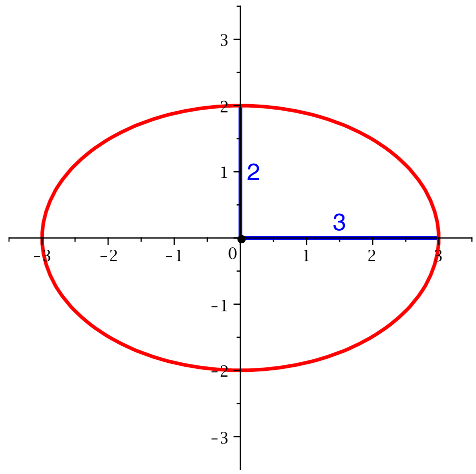
Bentuk umum : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Bila $a = b$, persamaan di atas disebut lingkaran.

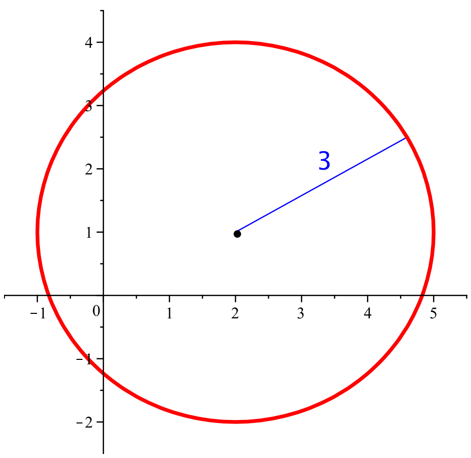
Bila $a \neq b$, persamaan di atas disebut elips.



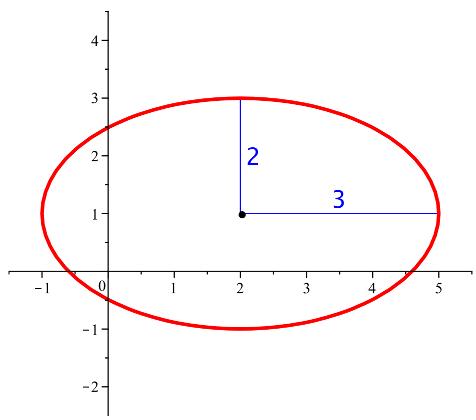
$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$



$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$



$$\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{3^2} = 1$$



$$\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$$

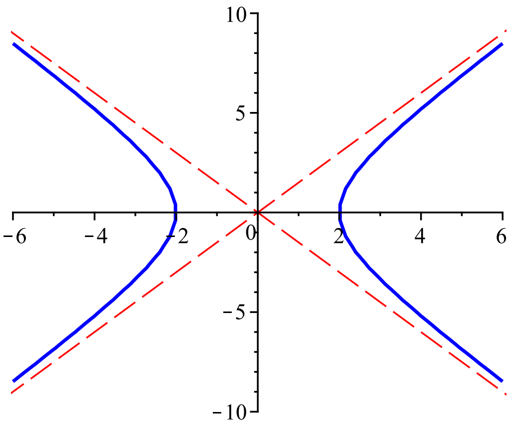
Latihan:

1. Tuliskan persamaan $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$ dalam bentuk baku dan gambarkan.
2. Tuliskan persamaan $4x^2 + y^2 - 16x + 2y + 1 = 0$ dalam bentuk baku dan gambarkan.
3. Tentukan persamaan lingkaran yang ujung garis tengahnya melalui titik $(1, 3)$ dan $(7, 11)$.

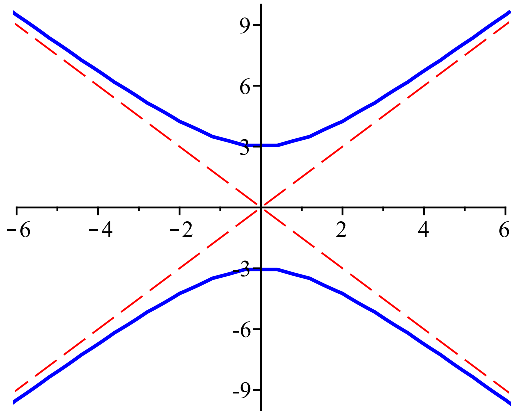
Hiperbola

Bentuk umum : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ atau -$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Hiperbola memiliki sepasang garis asimtot miring $y = \frac{b}{a}x$ dan $y = -\frac{b}{a}x$

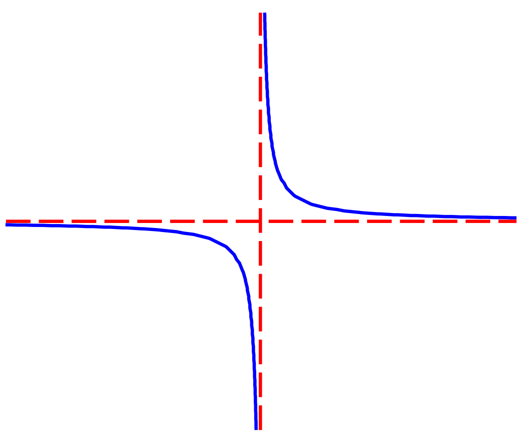


$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$$

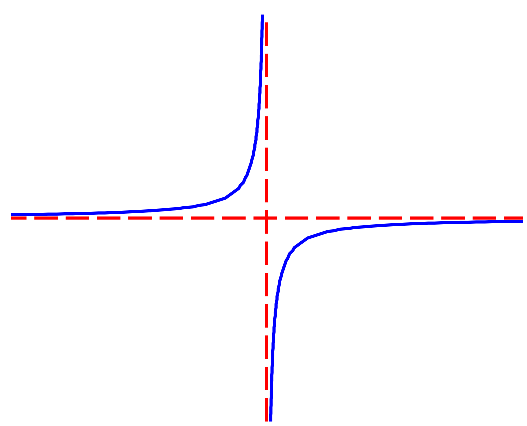


$$-\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

Bila hiperbola di atas kita rotasikan dengan sudut sebesar $\frac{\pi}{2}$ maka akan diperoleh gambar hiperbola seperti di bawah ini.



$$xy = k, \quad k > 0$$

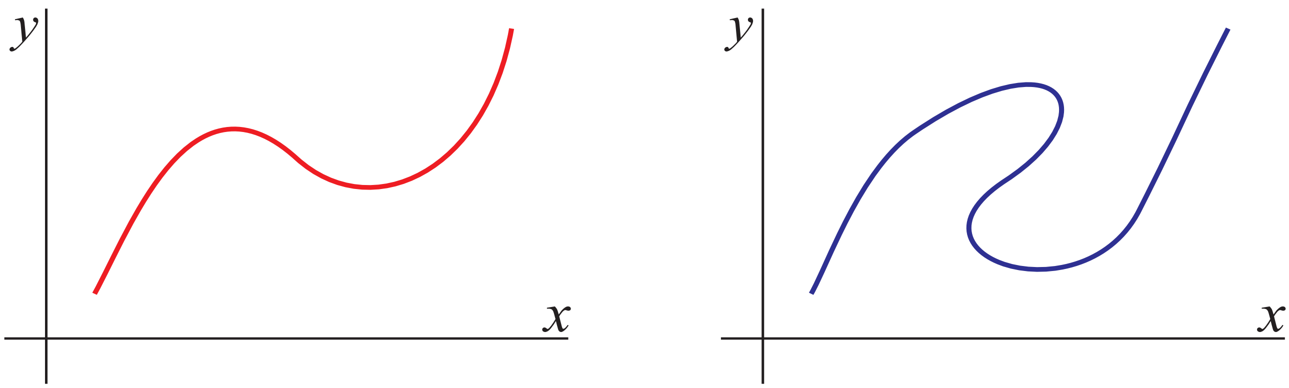


$$xy = k, \quad k < 0$$

Tunjukkan bila hiperbola $x^2 - y^2 = 1$ dirotasikan sebesar $\frac{\pi}{2}$ hasilnya adalah persamaan berbentuk $xy = k$ dan tentukan nilai k.

Persamaan Parameter Kurva di Bidang

Perhatikan sebuah partikel yang bergerak pada bidang datar. Lintasan dari partikel tersebut merupakan sebuah kurva. Pada bagian ini akan dipelajari tata cara merepresentasikan kurva tersebut dalam bentuk persamaan matematika. Perlu dipahami, tidak semua kurva dapat kita nyatakan dalam bentunk fungsi $y = f(x)$. Sebagai ilustrasi, perhatikan dua kurva berikut:



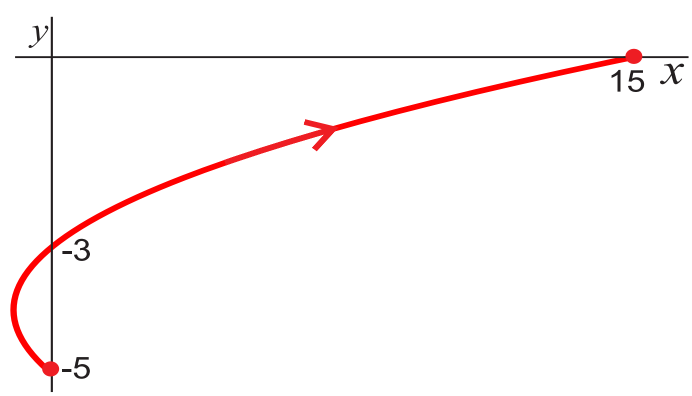
Kurva sebelah kiri dapat dinyatakan secara eksplisit $y = f(x)$, sedangkan kurva sebelah kanan berbentuk persamaan implisit $f(x, y) = 0$. Supaya kurva di bidang dapat direpresentasikan dalam bentuk persamaan eksplisit, maka diperkenalkan penyajian dalam bentuk persamaan parameter.

Misalkan $x = f(t)$ dan $y = g(t)$ dua buah fungsi kontinu pada interval $I = [a, b]$. Pasangan $(x, y) = (f(t), g(t))$ disebut persamaan parameter kurva di bidang dengan parameter t.

Contoh: $x = t^2 + 2t$ dan $y = t - 3 \quad -2 \le t \le 3$

Untuk mendapatkan persamaan dalam x dan y, eliminasilah parameter t.

$$y = t - 3 \Longleftrightarrow t = y + 3,$$
$$x = t^2 + 2t$$
$$x = (y + 3)^2 + 2(y + 3)$$
$$x = y^2 + 8y + 15 \qquad -5 \le y \le 0$$

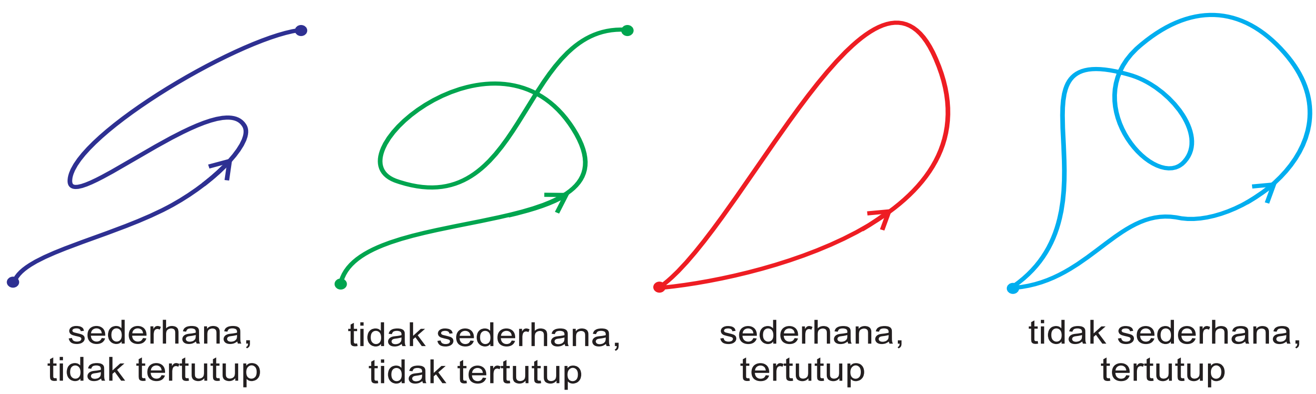


Contoh: Eliminasi parameter t dari $(x, y) = (a \cos t, b \sin t)$, $0 \le t \le \pi$, lalu gambarkan ♠

Istilah^2

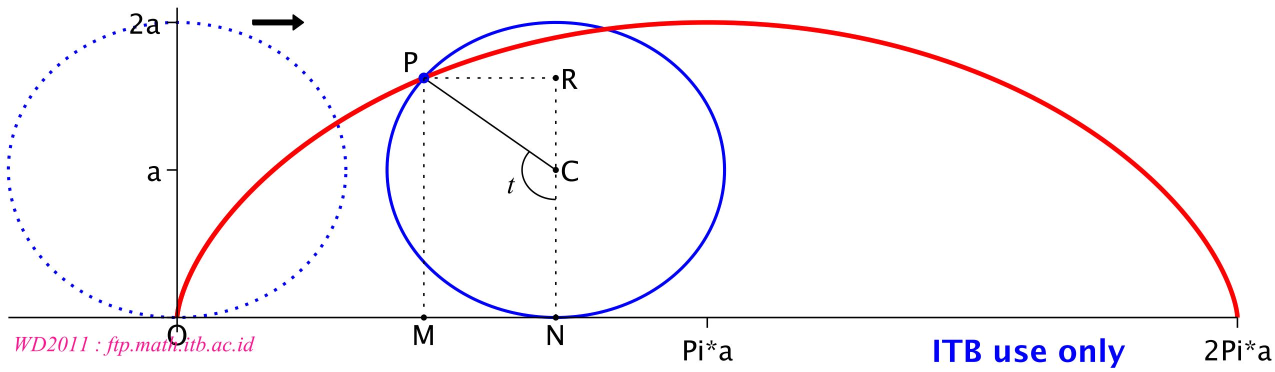
Diberikan persamaan kurva $x = f(t)$ dan $y = g(t)$ $\quad a \le t \le b$

- Titik $(x(a), y(a))$ disebut *titik awal*.
- Titik $(x(b), y(b))$ disebut *titik akhir*.
- Bila titik awal dan titik akhir berimpit, kurva disebut *tertutup*.
- Bila untuk setiap $t_1 \neq t_2$ dengan $a < t1, t2 < b$ berlaku $(x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2))$, maka kurva disebut *sederhana*.



Sikloid Animation

Sebuah roda berjari-jari a yang menggelinding sepanjang sumbu-x.



Titik P mula-mula berada di titik asal. Selama menggelinding, jejak titik P digambarkan sebagai kurva berwarna merah. Pada gambar di atas, titik P telah menempuh sudut sebesar t. Kita akan menentukan posisi dari titik $P(x, y)$ sebagai fungsi dari t.

|ON| = panjang busur PN $= at$

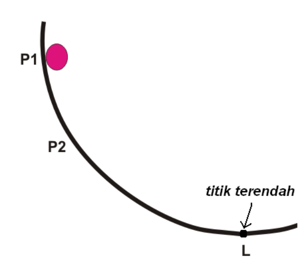
$x =$ |OM| = |ON| - |MN| $= at - a\sin t = a(t - \sin t)$

$y =$ |MP| = |NR| = |NC| + |CR| $= a - a\cos t = a(1 - \cos t)$

Jadi persaman lintasan sikloid adalah $(x, y) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$.

Sikloid mempunyai keistimewaan berikut:

- Sebuah partikel dilepaskan dari titik P1 (lihat gambar di samping) dan bergerak ke bawah sepanjang lengkungan sampai di titik dasar L. waktu tempuhnya akan minimum bila lintasan tersebut berbentuk sikloid.



- Bila dua buah benda masing-masing dari posisi P1 dan P2 dilepaskan, maka keduanya akan menggelinding dan mencapai titik L pada saat yang bersamaan Animation. Fenomena ini dijadikan dasar pembuatan jam bandul Animation

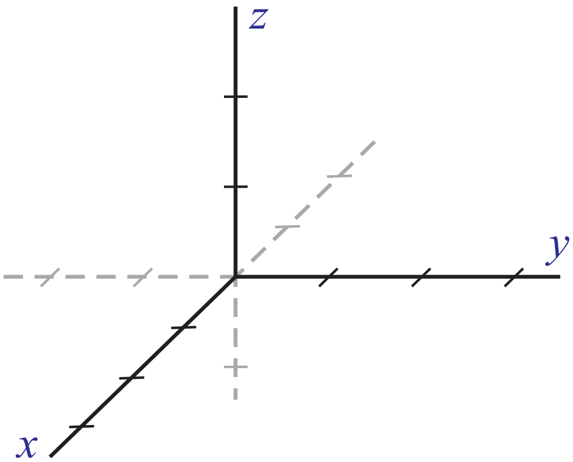
Turunan Fungsi berbentuk Parameter

Misalkan $(x, y) = (f(t), g(t), \quad a \leq t \leq b$ menyatakan persamaan kurva di bidang. Bila $f'(t)$ dan $g'(t)$ ada maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$

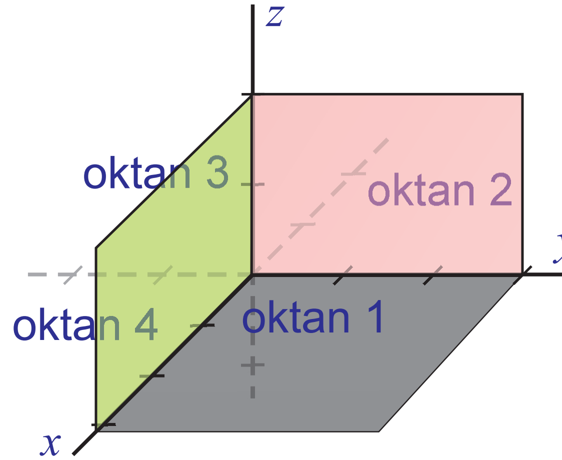
Soal-Soal:

1. Tentukan $\frac{d^2y}{dx^2}$ dari $x = 5\cos t$ dan $y = 4\sin t, \quad 0 < t < 3.$
2. Diberikan $x = 2t - 1, \quad y = t^2 + 2,$ Hitung $\int_1^3 xy^2\, dx.$
3. Hitung luas daerah di atas sumbu x dan di bawah lengkungan sikloid $(x(t), y(t)) = (t - \sin t, 1 - \cos t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

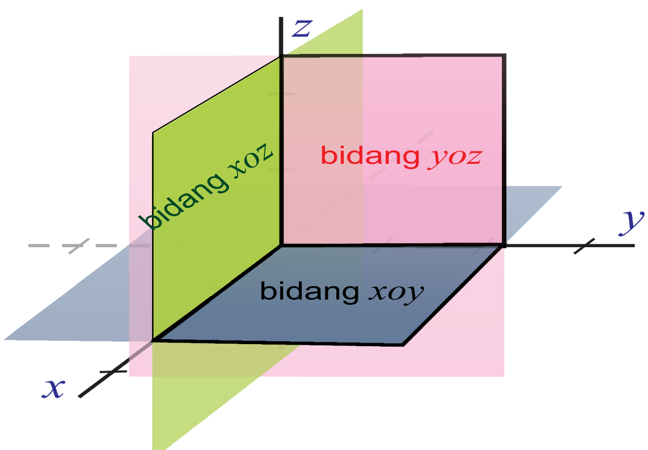
Sistem Koordinat Ruang, $\mathbb{R}^3$



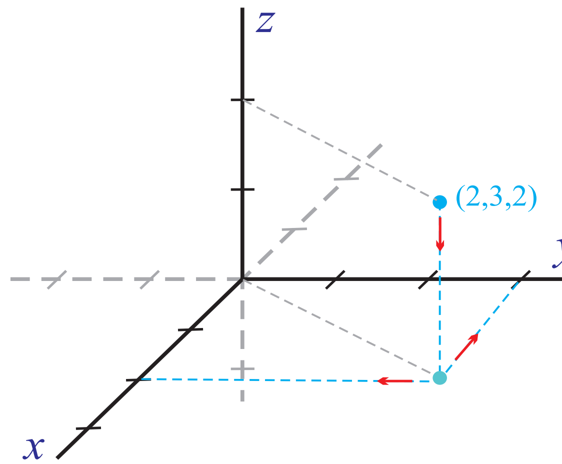
Sistem koordinat $\mathbb{R}^3$



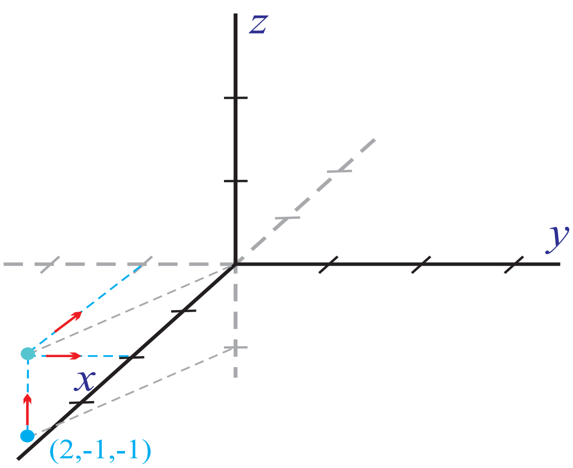
Oktan 1, oktan 2, $\cdots$, oktan 8



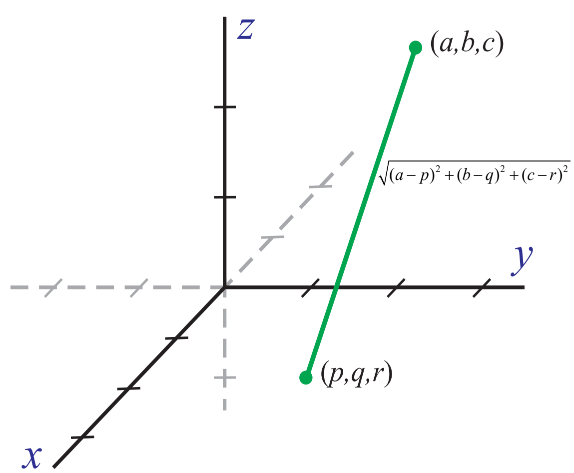
Bidang-bidang koordinat



Representasi titik di $\mathbb{R}^3$



Representasi titik di $\mathbb{R}^3$



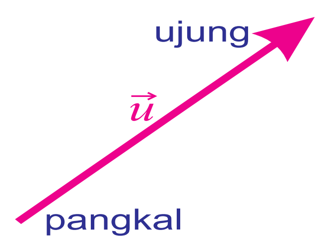
Jarak antara dua titik di $\mathbb{R}^3$

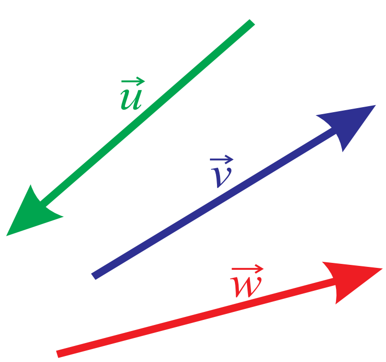
Vektor

Dalam kehidupan sehari-hari kita mengenal dua macam besaran. Besaran pertama adalah besaran yang cukup dinyatakan dalam sebuah nilai, misalnya besaran *panjang, massa, luas, volume, muatan listrik, laju benda yang bergerak, dan lain-lain*. Besaran seperti ini disebut besaran **skalar**. Besaran jenis kedua adalah besaran yang mempunyai **nilai** dan **arah**, seperti. *kecepatan, gaya, torsi, dan lain-lain*. Besaran seperti ini disebut **vektor**.

Untuk lebih memahami pengertian vektor, perhatikanlah ilustrasi berikut ini. Sebuah partikel bergerak sepanjang sumbu-x ke kanan dengan laju 10 meter/detik. Partikel kedua bergerak sepanjang lingkaran berjari-jari 1 meter dengan laju sama. Di dalam fisika, kecepatan partikel pertama adalah konstan (percepatannya nol), sedangkan kecepatan partikel kedua tidak konstan (percepatannya tidak nol). Percepatan pada partikel kedua berfungsi untuk mengubah arah geraknya.

Secara geometri, vektor biasanya digambarkan sebagai anak panah berarah, dan biasa ditulis menggunakan huruf kecil tebal ($\mathbf{u}$) atau huruf kecil dengan anak panah diatasnya ($\vec{u}$).

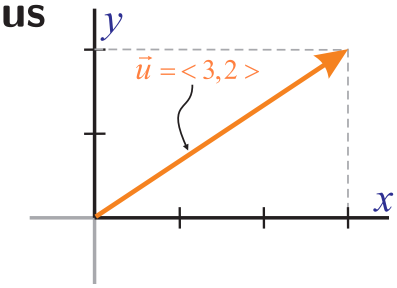




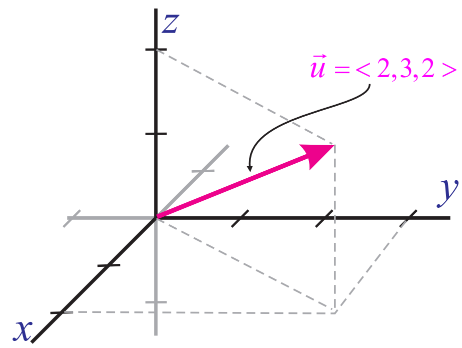
Dalam bidang datar, arah sebuah vektor ditentukan oleh sudut yang dibentuk anak panah tersebut dengan sumbu x positif. Namun di dalam ruang dimensi tiga, arah ini sukar untuk didefinisikan. Untuk itu, kita akan merepresentasikan vektor memakai sistem koordinat.

Nilai/panjang sebuah vektor adalah panjang dari anak panah tersebut. Dengan demikian nilai sebuah vektor selalu tak negatif. Bila sebuah vektor bertanda negatif, hal itu hanya menyatakan arahnya saja.

Representasi Vektor pada Koordinat Kartesius



Vektor pada koordinat kartesius digambarkan sebagai anak panah yang berpangkal di pusat koordinat. Untuk membedakan dengan koordinat titik, komponen sebuah vektor dituliskan di dalam kurung lancip, seperti pada ilustrasi di samping ini.



Panjang sebuah vektor $\vec{u}$ diberi notasi $||\vec{u}||$. Misalkan $\vec{u}=\langle u_1,u_2\rangle$ dan $\vec{v}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$, maka

$$||\vec{u}||=\sqrt{u_1^2+u_2^2}, \quad ||\vec{v}||=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}.$$

Pangkal sebuah vektor tidak selalu harus berada di pusat koordinat. Sebuah vektor yang berpangkal di titik $P(x_1,y_1,z_1)$ dan ujungnya di $P(x_2,y_2,z_2)$ adalah vektor $\vec{u}=\langle x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-y_1\rangle$.

Dua buah vektor dikatakan sama bila panjang dan arahnya sama.
Jadi kesamaan dua buah vektor tidak ditentukan oleh posisinya, tapi oleh panjang dan arahnya.

Penjumlahan Vektor

Misalkan $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ dua buah vektor. Untuk menentukan $\vec{u}+\vec{v}$, kita geser dan tempatkan pangkal vektor $\vec{v}$ pada ujung $\vec{u}$. Hasil penjumlahannya adalah vektor dengan pangkal pada pangkal $\vec{u}$ dan ujungnya pada ujung $\vec{v}$.
Secara aljabar, bila $\vec{u}=\langle u_1,u_2,u_3\rangle$ dan $\vec{v}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$, maka
$\vec{u}+\vec{v}=\langle u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3\rangle$.

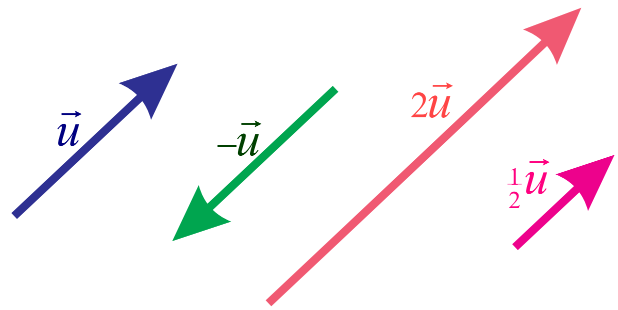
Perkalian Vektor dengan Skalar

Misalkan $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$,

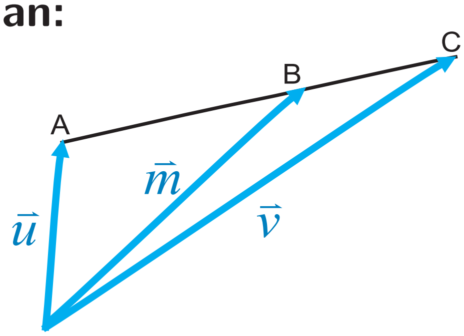
$-\vec{u} = \langle -u_1, -u_2, -u_3 \rangle$

$2\vec{u} = \langle 2u_1, 2u_2, 2u_3 \rangle$

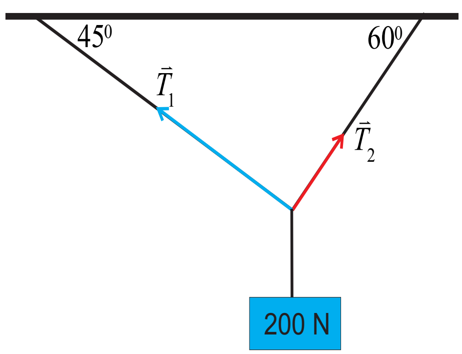
$\frac{1}{2}\vec{u} = \langle \frac{1}{2}u_1, \frac{1}{2}u_2, \frac{1}{2}u_3 \rangle$



Latihan:

1. 

Diketahui $\overline{AB} = \frac{2}{3}\overline{AC}$. Nyatakan vektor $\vec{m}$ dalam $\vec{u}$ dan $\vec{v}$

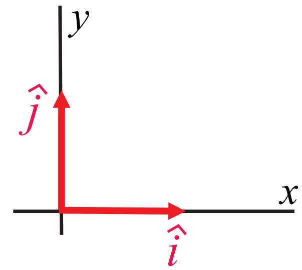
2. 

Sebuah benda digantung seperti pada gambar. Tentukan besarnya gaya tegangan tali T_1 dan T_2

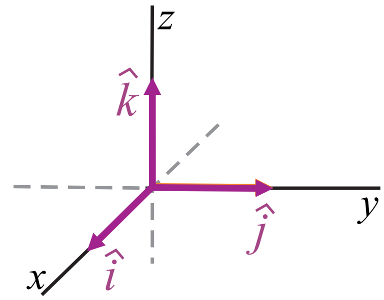
Sifat-sifat : Misalkan $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tiga buah vektor dan $a, b \in \mathbb{R}$, maka:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (komutatif)
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w})$ (asosiatif)
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ dengan $\vec{0} = \langle 0, 0 \rangle$
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
5. $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u} = \vec{u}(ab)$
6. $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
7. $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
8. $1\,\vec{u} = \vec{u}$

Vektor Basis



Vektor basis adalah sekumpulan vektor-vektor khusus, di mana vektor-vektor yang lain dapat dinyatakan sebagai *kombinasi linear* dari vektor-vektor tersebut.



Vektor-vektor basis di bidang:
$\widehat{i} = \langle 1, 0 \rangle$, dan $\widehat{j} = \langle 0, 1 \rangle$

Vektor-vektor basis di ruang:
$\widehat{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $\widehat{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$, dan $\widehat{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$

Misalkan $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, maka dengan menggunakan vektor-vektor basis kita dapat menuliskannya sebagai berikut,

$$\begin{aligned}\vec{u} =& \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \\ &= u_1 \langle 1, 0, 0 \rangle + u_2 \langle 0, 1, , 0 \rangle + u_3 \langle 0, 0, 1 \rangle \\ &= u_1 \widehat{i} + u_2 \widehat{j} + u_3 \widehat{k}\end{aligned}$$

Hasil kali titik/dalam:

Hasil kali titik antara dua buah vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ didefinisikan sebagai berikut:

di $\mathbb{R}^2$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \langle u_1, u_2 \rangle \cdot \langle v_1, v_2 \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$

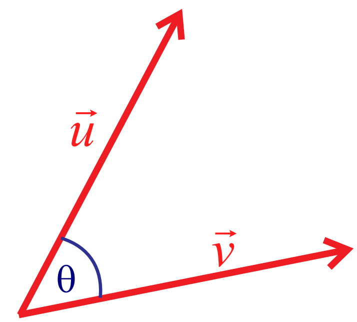
di $\mathbb{R}^3$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \cdot \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

Hasil kali titik antara dua buah vektor adalah sebuah skalar. Konsep ini banyak digunakan dalam bidang mekanika dan grafik 3 dimenasi.

Berikut ini disajikan sifat-sifat penting dari hasil kali titik,

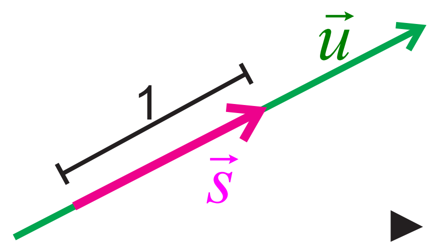
Sifat[2]: Misalkan $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tiga buah vektor dan $c \in \mathbb{R}$, maka:

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (komutatif)
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ distributif
3. $c(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (c\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (c\vec{v})$
4. $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$.
5. $\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||^2$
6. $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}|| \cos(\theta)$, θ sudut antara $\vec{u}$ dan $\vec{v}$.
7. $\vec{u} \perp \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



Vektor Satuan

Vektor satuan dari sebuah vektor $\vec{u}$ adalah vektor yang panjangnya satu dan searah dengan vektor $\vec{u}$. Pada gambar di samping, $\vec{s}$ adalah vektor satuan dari $\vec{u}$, dan $\vec{s} = \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$



Vektor Proyeksi

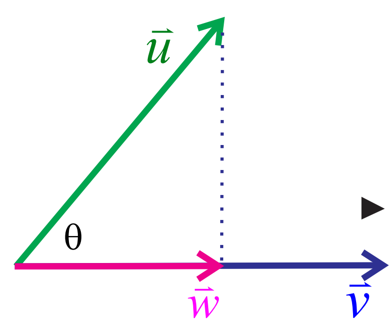
Vektor $\vec{u}$ diproyeksikan pada $\vec{v}$ dan hasilnya adalah vektor $\vec{w}$.
Akan ditentukan $\vec{w}$ dalam $\vec{u}$ dan $\vec{v}$.

$||\vec{w}|| = ||\vec{u}|| \cos\theta = ||\vec{u}|| \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||}$

$\vec{w} = ||\vec{w}|| \times$ vektor satuan dari $\vec{v}$.

$= ||\vec{w}|| \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$.

$= ||\vec{u}|| \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||} \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{v}||\,||\vec{v}||} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{v}||^2} \vec{v}$

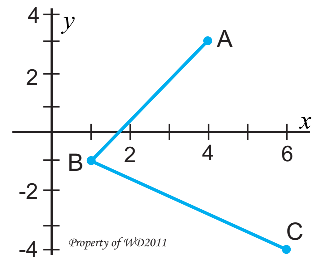


Proyeksi vektor $\vec{u}$ pada vektor $\vec{v}$ adalah vektor $\vec{w} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{v}||^2} \vec{v}$

Latihan:

1. Tentukan b supaya $\langle 8,6\rangle$ dan $\langle 3,b\rangle$ saling tegak lurus. ♠

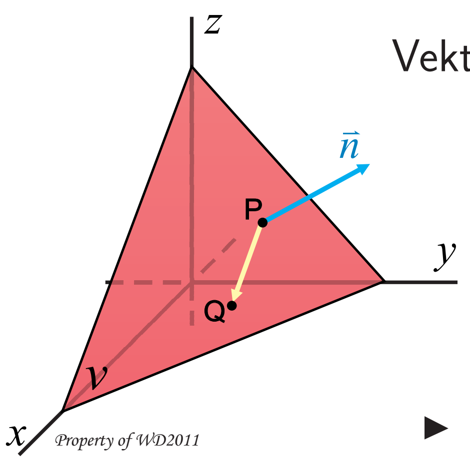
2. Bila $A=(4,3)$, $B=(1,-1)$ dan $C=(6,-4)$, gunakan konsep vektor untuk menentukan sudut ABC. ♠



3. Cari vektor proyeksi $\vec{u}=\langle -1,5\rangle$ pada $\vec{v}=\langle 3,3\rangle$ ●

4. Cari vektor proyeksi $\vec{u}=\langle 4,5,3\rangle$ pada $\vec{v}=\langle 2,2,-6\rangle$ ●

Persamaan Bidang di Ruang



Perhatikan bidang v (warna merah).

Titik $P=(x_0,y_0,z_0)$ terletak pada bidang v.

Vektor $\vec{n}=\langle A,B,C\rangle$ tegak lurus terhadap bidang v.

Akan ditentukan persamaan bidang v.

Misalkan $Q=(x,y,z)$ sebarang titik pada bidang v.

Bentuk vektor $\overrightarrow{PQ}=\langle x-x_0,y-y_0,z-z_0\rangle$

▶ Jelas $\overrightarrow{PQ}\perp\vec{n}$

$\langle x-x_0,y-y_0,z-z_0\rangle\cdot\langle A,B,C\rangle=0$

Persamaan bidang v : $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

Latihan:

1. Misalkan $P=(1,2,3)$ dan $Q=(4,4,-2)$. Tentukan persamaan bidang yang melalui titik P dan tegak lurus terhadap vektor $\overrightarrow{PQ}$. ♠

2. Tentukan sudut antara bidang $3x-4y+7z=5$ dan bidang $2x+4y+3z=8$. ●

3. Buktikan jarak dari titik (x_0,y_0,z_0) ke bidang $Ax+By+Cz=D$ adalah $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. ●

Hasil Kali Silang (Cross Product)

Hasil kali silang hanya didefinisikan pada vektor di $\mathbb{R}^3$. Misalkan $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ dan $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ dua buah vektor. Hasil kali silang dari $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ didefinisikan sebagai:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\hat{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1)\hat{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\hat{k}$$

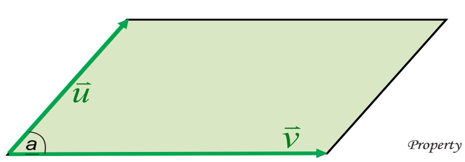
Sifat-Sifat: Misalkan $\vec{u}, \vec{v}$ tiga buah vektor maka:

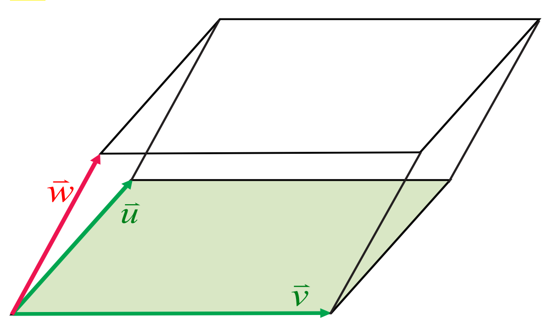
1. $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$ dan $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$, akibatnya

   $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ dan $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$
2. $\vec{u}$, $\vec{v}$, dan $(\vec{u} \times \vec{v})$ membentuk "right handed triple"
3. $||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}||\,||\vec{v}|| \sin\theta$, dengan θ sudut antara $\vec{u}$ dan $\vec{v}$.

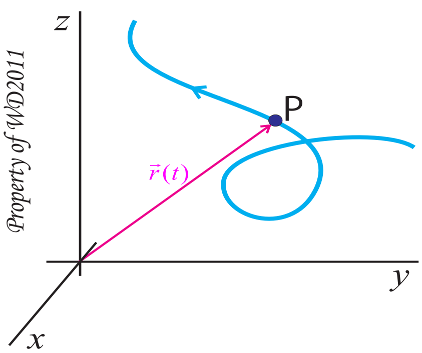
Latihan:

1. Cari persamaan bidang yang melalui tiga titik $(1, -2, 3)$, $(4, 1, -2)$, dan $(-2, -3, 0)$.
2. Periksa, apakah hasil kali silang bersifat komutatif, yaitu $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$.
3. Tunjukkan, secara geometri, $||\vec{u} \times \vec{v}||$ adalah luas jajaran genjang seperti pada gambar di sebelah kiri bawah.
4. Tunjukkan, secara geometri, $|\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|$ adalah volume "parallelepiped" seperti pada gambar di sebelah kanan bawah.





Fungsi Bernilai Vektor dan Gerak Sepanjang Kurva



Perhatikan sebuah titik P yang bergerak di ruang dengan lintasan seperti pada gambar di samping kiri. Posisi titik P pada saat t dinyatakan oleh vektor yang berpangkal di titik asal dan ujungnya di titik P. Posisinya tersebut dapat ditulis sebagai $\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$. Vektor $\vec{r}$ merupakan fungsi dengan variabel real t dan nilainya adalah sebuah vektor. Fungsi demikian disebut fungsi bernilai vektor.

Secara umum, fungsi bernilai vektor adalah sebagai berikut::

$$\vec{F}(t) = f(t)\,\widehat{i} + g(t)\,\widehat{j} = \langle f(t), g(t)\rangle \quad \text{dengan } t \in \mathbb{R}$$

atau

$$\vec{F}(t) = f(t)\,\widehat{i} + g(t)\,\widehat{j} + h(t)\,\widehat{k} = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle \quad \text{dengan } t \in \mathbb{R}$$

Untuk selanjutnya hanya akan dibicarakan fungsi bernilai vektor di ruang. Untuk fungsi bernilai vektor di bidang aturannya sama saja, hanya komponennya dua buah.

Kalkulus Fungsi Bernilai Vektor

Pengertian konsep limit untuk fungsi bernilai vektor "sama" dengan konsep limit di fungsi real biasa. Untuk perhitungannya berlaku sifat berikut:

Misalkan $\vec{F}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$, maka $\lim\limits_{t\to c} \vec{F}(t) = \langle \lim\limits_{t\to c} f(t), \lim\limits_{t\to c} g(t), \lim\limits_{t\to c} h(t)\rangle$

Turunan dan Integral fungsi bernilai vektor juga mewarisi sifat-sifat di fungsi real sbb:

Misalkan $\vec{F}(t) = \langle f(t), g(t)\rangle$, maka

a. $\vec{F}'(t) = \langle f'(t), g'(t)\rangle$

b. $\int \vec{F}(t)\,dt = \langle \int f(t)\,dt\,,\ \int g(t)\,dt\rangle$

Sifat[2] Operasi Aljabar Fungsi Bernilai Vektor:

Misalkan $\vec{F}(t)$, $\vec{G}(t)$ fungsi bernilai vektor, $h(t)$ fungsi real dan $c \in \mathbb{R}$, maka:

1. $D_t[\vec{F}(t) + \vec{G}(t)] = \vec{F}'(t) + \vec{G}'(t)$
2. $D_t[c\,\vec{F}(t)] = c\,\vec{F}'(t)$
3. $D_t[h(t)\,\vec{F}(t)] = h(t)\,\vec{F}'(t) + h'(t)\vec{F}(t)$
4. $D_t[\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)] = \vec{F}'(t) \cdot \vec{G}(t) + \vec{F}(t) \cdot \vec{G}'(t)$
5. $D_t[\vec{F}(h(t))] = \vec{F}'(h(t))\,h'(t)$

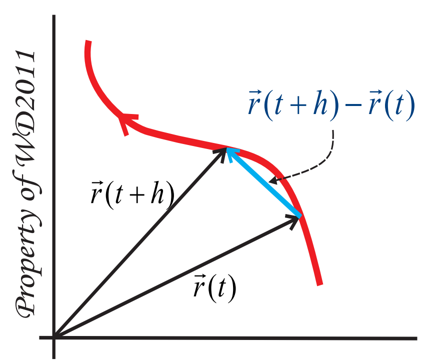
Contoh: Diberikan $\vec{F}(t) = (t^2 + t)\,\widehat{i} + e^t\,\widehat{j}$.

a. Tentukan $\vec{F}'(t)$ dan $\vec{F}''(t)$ dan sudut antara $\vec{F}'(0)$ dan $\vec{F}''(0)$.

b. Tentukan $D_t[t^3\vec{F}(t)]$ dan $\int_0^1 \vec{F}(t)\,dt$ ♠

Perhatikan sebuah titik P yang bergerak di bidang/ruang dengan posisi setiap saat $\vec{r}(t)$. Dari hukum Fisika, kecepatan $\vec{v}$ dan percepatannya $\vec{a}$ adalah: $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$, dan $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t)$

Arah dari vektor kecepatan $\vec{v}$ dapat dikaji dari definisi turunan r', yaitu $\vec{v}(t) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)}{h}$. Dengan demikian arah $\vec{v}$ sama dengan arah garis singgung terhadap $\vec{r}(t)$.



Latihan:

1. Sebuah titik P bergerak sepanjang lingkaran berjari-jari r dengan laju ω rad/detik. Bila kedudukan awalnya di $(1, 0)$, tentukan kecepatan dan percepatannya pada saat $t = 0,5$ dan gambarkan. •

2. Sebuah titik P bergerak dengan posisi setiap saat $(x, y) = (3\cos t, 2\sin t)$. •
   a. Gambarkan grafik lintasan P dan arahnya.
   b. Tentukan kecepatan, laju dan percepatannya.

c. Tentukan saat kapan lajunya maksimum dan berapa nilainya.

d. Tunjukkan vektor percepatannya selalu menuju titik asal.

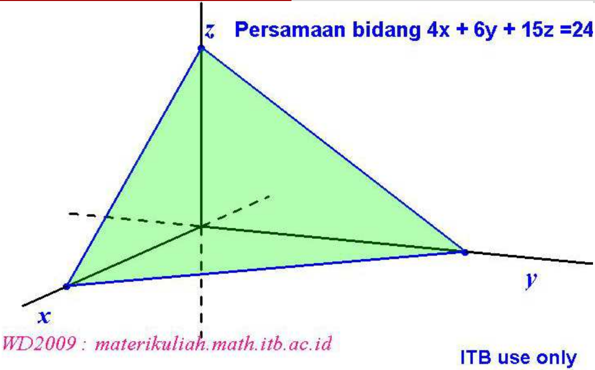
Permukaan Standard di Ruang

Warsoma Djohan

Prodi Matematika, FMIPA - ITB

January 21, 2016

Bidang 1



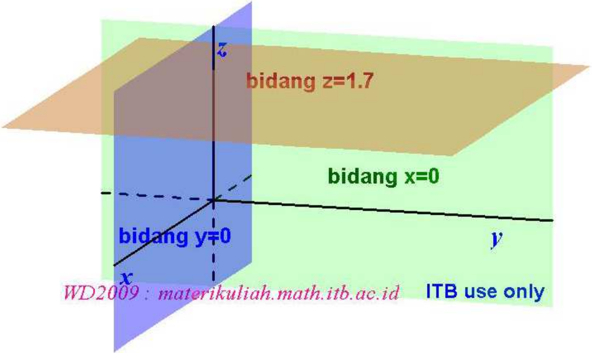
Menggambar bidang $4x + 6y + 15z = 24$

Perpotongan dengan sumbu-sumbu koordinat: $(6, 0, 0), (0, 4, 0), (0, 0, 1.6)$.

Hubungkan ketiga titik tersebut dengan garis lurus

Warnai bidang tersebut ■

Bidang 2



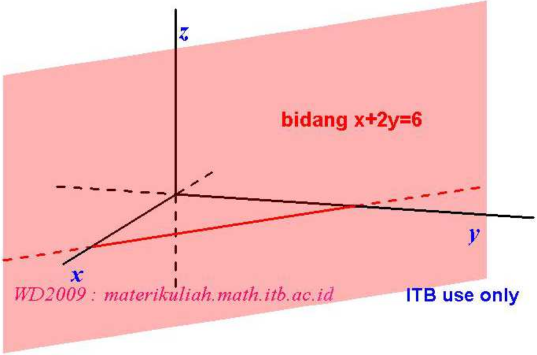
Menggambar bidang yang sejajar dengan bidang koordinat

bidang $x = 0$, disebut juga bidang *yoz*

bidang $y = 0$, disebut juga bidang *xoz*

bidang $z = 1.7$. Bidang ini sejajar dengan bidang *xoy*. ■

Bidang 3

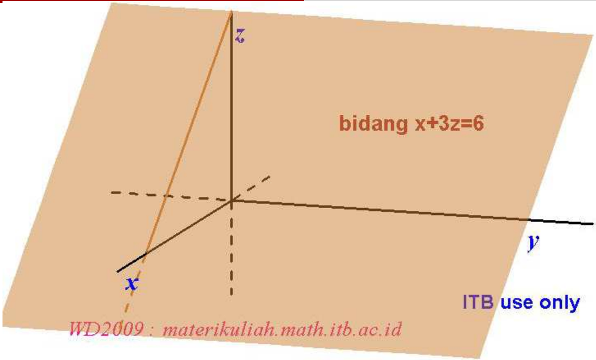


Menggambar bidang $x + 2y = 6$

Gambarkan garis $x + 2y = 6$ pada bidang xoy

Nilai varibel z bebas, jadi tinggal ditarik sejajar sumbu z. ∎

Bidang 4



Menggambar bidang $x + 3z = 6$

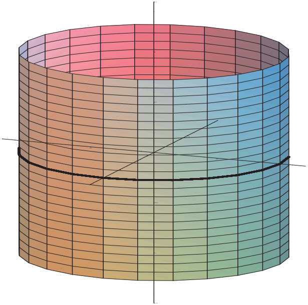
Gambarkan garis $x + 3z = 6$ pada bidang xoz

Nilai varibel y bebas, jadi tinggal ditarik sejajar sumbu y. ■

Silinder

Silinder adalah permukaan di ruang yang dibangun oleh sebuah persamaan (tak linear) yang melibatkan dua buah variabel, sedangkan variabel ketiga bebas.

Contoh: (a) $x^2 + y^2 = 9$ (b) $x^2 + 4y^2 = 10$ (c) $y = x^3$

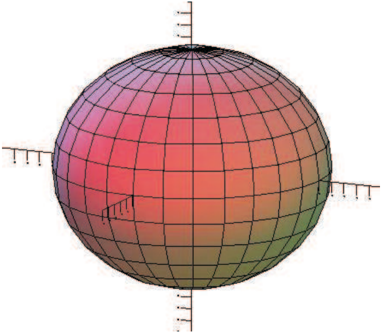


Menggambar silinder $x^2 + y^2 = 9$.

Irisan dengan bidang XOY : $x^2 + y^2 = 9$.

Nilai Variabel z bebas.

Animation 1 Animation 2



Bola

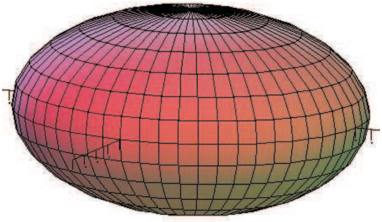
Bentuk umum: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Irisan dengan bidang XOY : $x^2 + y^2 = r^2$.

Irisan dengan bidang XOZ : $x^2 + z^2 = r^2$.

Irisan dengan bidang YOZ : $y^2 + z^2 = r^2$.

Animation ■



Elipsoida

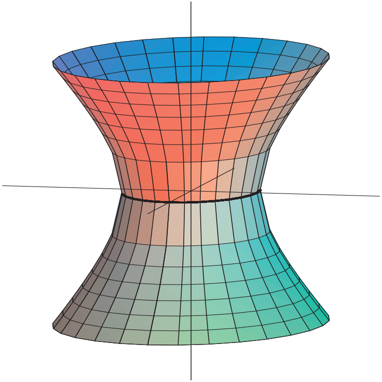
Bentuk umum: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2$.

Irisan dengan bidang XOY : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$.

Irisan dengan bidang XOZ : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2$.

Irisan dengan bidang YOZ : $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2$.

Animation ■



Hiperboloida Berdaun Satu

Bentuk umum: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$

Irisan dengan bidang XOY : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

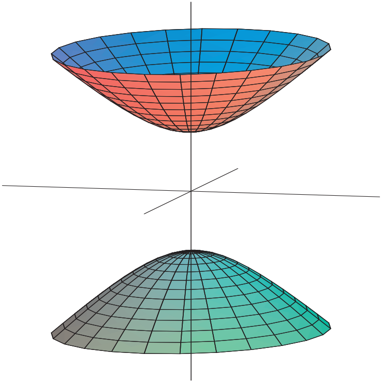
Irisan dengan bidang $z = k$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{k^2}{c^2} = 1. \Longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}.$$

Irisan dengan bidang YOZ : $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \Longleftrightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$

Irisan dengan bidang XOZ : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Animation 1 Animation 2 ■



Hiperboloida Berdaun Dua

Bentuk umum: $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

Untuk $x = 0$ dan $y = 0$, $z = \pm c.$

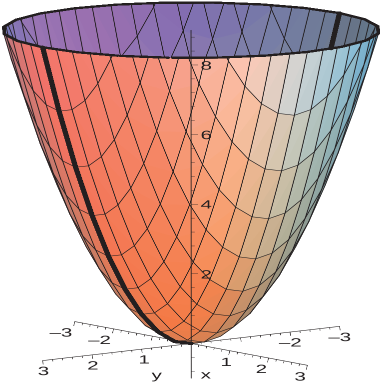
Irisan dengan bidang $z = k, \quad k > c:$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{k^2}{c^2} = 1. \Longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1.$$

Irisan dengan bidang YOZ : $-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

Irisan dengan bidang XOZ : $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

Animation 1 Animation 2 ■



Paraboloida

Bentuk umum: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Untuk $x = 0$ dan $y = 0$, $z = 0$.

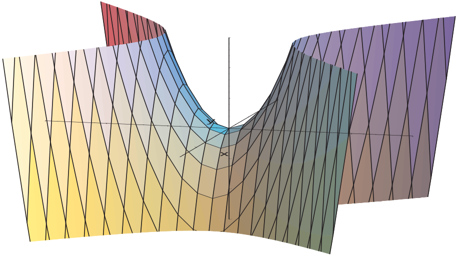
Irisan dengan bidang $z = k$, $k > 0$:

$$k = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \iff \frac{x^2}{k\,a^2} + \frac{y^2}{k\,b^2} = 1.$$

Irisan dengan bidang YOZ : $z = \frac{y^2}{b^2}$.

Irisan dengan bidang XOZ : $z = \frac{x^2}{a^2}$.

Animation 1 Animation 2 ■



Paraboloida-Hiperboloida

Bentuk umum: $z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Irisan dengan bidang XOY

$0 = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \Longleftrightarrow y = \pm \frac{b}{a} x$

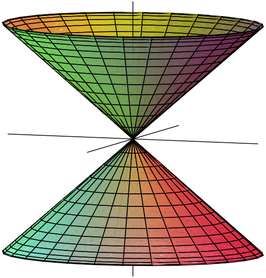
Irisan dengan bidang yoz: $z = \frac{y^2}{b^2}$.

Irisan dengan bidang xoz: $z = -\frac{x^2}{a^2}$.

Irisan dengan bidang z=k, k>0: $k = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Irisan dengan bidang z=k, k<0: $k = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Animation ■



Kerucut-Elips

Bentuk umum: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$

Irisan dengan bidang xoy : titik (0,0,0).

Irisan dengan bidang xoz : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \Longleftrightarrow z = \pm \frac{a}{c} x$

Irisan dengan bidang yoz : $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \Longleftrightarrow z = \pm \frac{b}{c} y$

Irisan dengan bidang z=k: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{k^2}{c^2} = 0 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2}$

Animation 1 Animation 2 ■

Kalkulus Fungsi Dua Peubah atau Lebih

Warsoma Djohan

Prodi Matematika, FMIPA - ITB

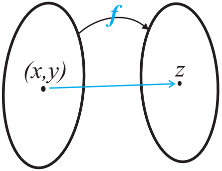
January 21, 2016

Fungsi Dua Peubah

Fungsi real dengan dua peubah real adalah fungsi yang memadankan pasangan terurut $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ dengan sebuah bilangan $z \in \mathbb{R}$.

Notasi: $z = f(x,y)$.
x dan y disebut peubah/variabel bebas.
z disebut peubah/variabel tak bebas.

Contoh: $f(x,y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{x^2+(y-1)^2}$



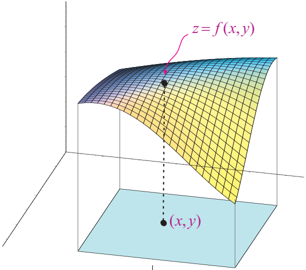
$f : (x,y) \longmapsto z$

Daerah definisi/Domain dari fungsi f, dinotasikan D_f, adalah kumpulan semua pasangan (x,y) sehingga $f(x,y)$ terdefinisi/punya nilai.

Daerah Nilai/Range dari fungsi f, $R_f = \{z \in \mathbb{R} | z = f(x,y), (x,y) \in D_f\}$.

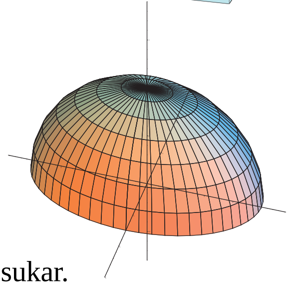
Latihan: Tentukan daerah definisi dari contoh di atas lalu gambarkan. ♠

Grafik fungsi dua peubah $z = f(x,y)$ merupakan suatu permukaan di ruang (lihat gambar di samping).



Dari pembahasan gambar-gambar permukaan standard di ruang yang lalu, tentukanlah mana yang merupakan fungsi dan mana yang bukan.

Contoh: Gambarkan grafik $z = \frac{1}{3}\sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$



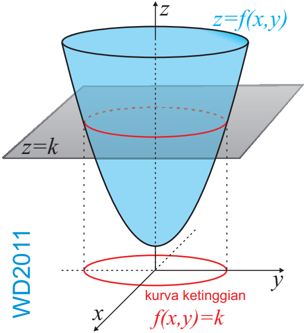
Kuadratkan ke dua ruas, maka diperoleh bentuk

$$9x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36 \quad z \geq 0$$

Persaman terakhir adalah persamaan elipsoida.

Secara umum menggambar fungsi dua peubah cukup sukar.
Cara lain yang lebih mudah untuk menggambarkan fungsi dua peubah adalah dengan membuat **kontur/kurva ketinggiannya**.

Kurva Ketinggian /Peta Kontur



Diberikan sebuah permukaan $z = f(x,y)$.

Iriskan permukaan tersebut dengan bidang $z = k$

Hasil irisannya berupa sebuah kurva di ruang.

Proyeksikan kurva tersebut pada bidang *xoy*

Hasil proyeksi ini disebut kurva ketinggian dari $z = f(x,y)$ dengan ketinggian k

Kurva ketinggian dari sebuah fungsi dua peubah $z = f(x,y)$ adalah kumpulan titik-titik pada bidang *xoy* yang mempunyai nilai fungsi / ketinggian sama.

Gambar beberapa kurva ketinggian dengan berbagai k disebut **peta kontur**.

Contoh: Gambarkan peta kontur dari $z = \frac{1}{3}\sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$ ♠

Diskusi:

- Mungkinkah dua buah kontur dengan k berbeda, berpotongan ?
- Mungkinkah dua buah kontur yang tidak berpotongan mempunyai nilai k yang sama ?

Latihan: Gambarkan peta kontur dari: (a) $z = xy$ ♠ (b) $z = y^2 - x^2$. ●

Fungsi Tiga Peubah

Fungsi real dengan tiga peubah adalah fungsi yang memadankan pasangan terurut (x, y, z) dengan satu bilangan real u dan dinotasikan: $u = f(x, y, z)$.

Contoh: (a) $u = f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ (b) $v = g(x,y,z) = \sqrt{x} + y^2$

(c) Temperatur setiap titik dalam suatu ruang $T(x,y,z) = z - x^2 - y^2$.

Grafik fungsi tiga peubah sudah tidak mungkin digambarkan, mengapa?

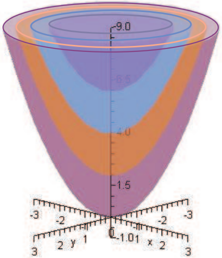
Peta konturnya dapat kita gambar dan berbentuk permukaan $f(x,y,z) = k$.

Contoh: Gambarkan peta kontur dari $T(x,y,z) = z - x^2 - y^2$.

Persamaan kurva ketinggiannya: $z - x^2 - y^2 = k$

$$z = x^2 + y^2 + k$$

Peta kontur berupa kumpulan paraboloida.



Turunan Parsial

Turunan parsial dari fungsi dua peubah bertujuan untuk menghitung gradien/tanjakan/laju perubahan ketinggian dari kurva yang merupakan perpotongan permukaan $z = f(x,y)$ dengan bidang yang sejajar dengan bidang *xoz* atau bidang *yoz*.

Untuk itu dikenal ada dua macam turunan parsial, yaitu:

a. Turunan parsial terhadap variabel x ♠

b. Turunan parsial terhadap variabel y ♠

Cara menentukan turunan parsial sebuah fungsi dua peubah sama saja dengan cara menentukan turunan fungsi satu peubah. Untuk jelasnya ikutilah contoh berikut ini.

Contoh:
Tentukan semua turunan parsial pertama dari $f(x,y) = x^2y^3 + e^{x^2y}$. ♠

Turunan Parsial Kedua

Turunan parsial pertama dari fungsi dua peubah $z = f(x,y)$ akan menghasilkan dua buah fungsi baru $f_x(x,y)$ dan $f_y(x,y)$. Bila kedua fungsi ini diturunkan lagi terhadap variabel x dan y, hasilnya disebut turunan parsial kedua.

Berikut disajikan notasi dan definisi turunan parsial kedua.

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_x(x+\Delta x,y) - f_x(x,y)}{\Delta x}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x(x,y+\Delta y) - f_x(x,y)}{\Delta y}$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_x(x+\Delta x,y) - f_x(x,y)}{\Delta x}$$

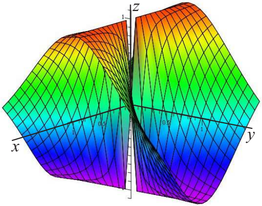
$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_y(y,y+\Delta y) - f_y(x,y)}{\Delta y}$$

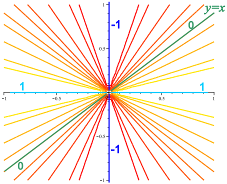
Latihan: Tentukan semua turunan parsial kedua dari $f(x,y) = x^2y^3 + e^{x^2 y}$. ♠

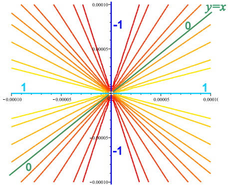
Limit Fungsi 2 Peubah

Misalkan $z = f(x,y)$ fungsi dua peubah dan $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Kita akan mengamati *kecendrungan* nilai $f(x,y)$ bila (x,y) *mendekati* titik (a,b).

Perhatikan grafik dan peta kontur dari $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ berikut ini:







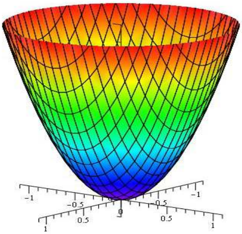
Perbesaran gambar 2, 10.000 kali

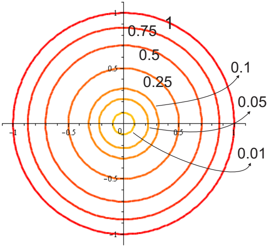
Bila $(x,y) \to (0,0)$ sepanjang sumbu x, nilai $f(x,y) \to 1$

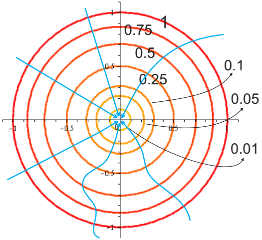
Bila $(x,y) \to (0,0)$ sepanjang sumbu y, $f(x,y) \to -1$

Bila $(x,y) \to (0,0)$ sepanjang garis $y = x$, $f(x,y) \to 0$

Perhatikan grafik dan peta kontur dari $f(x,y) = x^2 + y^2$ berikut ini:





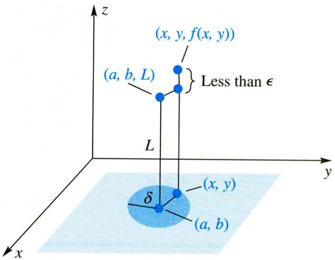


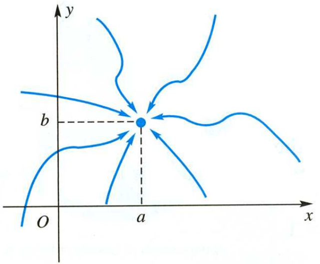
Perhatikan peta kontur paling kanan.
(bila kurang jelas, perbesarlah tampilannya).

Kurva biru menunjukkan jalur-jalur yang semuanya menuju titik asal.

Pada tiap jalur, amatilah kecendrungan nilai $f(x,y)$ bila $(x,y) \to (0,0)$.

Apakah tiap jalur memberikan kecendrungan nilai $f(x,y)$ yang sama ?





Limit dari fungsi dua peubah $f(x,y)$ untuk (x,y) mendekati (a,b) disebut L, ditulis $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$, selalu dapat dicari $\delta > 0$ sehingga $0 < |(x,y)-(a,b)| < \delta \Rightarrow |f(x,y)-L| < \varepsilon$.

Catatan: $|(x,y)-(a,b)| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$

Fungsi f tidak perlu terdefinisi pada titik (a,b).

Nilai limit $f(x,y)$ tidak boleh bergantung pada arah (x,y) mendekati (a,b). (Pada fungsi dua peubah tidak ada konsep limit kiri atau limit kanan).

Soal-soal Latihan Limit Fungsi Dua Peubah

1. Periksa $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x-y}$
2. Periksa $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3-x^2-xy}{x^2+y^2}$
3. Periksa $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^4-y^4}$
4. Periksa $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$
5. Periksa $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

Kekontinuan Fungsi Dua Peubah

Definisi: Fungsi dua peubah $z = f(x,y)$ disebut kontinu di titik (a,b) bila memenuhi $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

Sifat-sifat:

- Misalkan $f(x,y)$ dan $g(x,y)$ kontinu di (a,b) maka $f+g$, $f-g$, fg, dan f/g kontinu di (a,b).
- Polinom dua peubah, $p(x,y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + \cdots$ kontinu di $\mathbb{R}^2$
- fungsi rasional dua peubah kontinu di seluruh daerah definisinya.
- **Fungsi komposisi**. Misalkan $g(x,y)$ kontinu di (a,b) dan $f(x)$ kontinu di $g(a,b)$, maka $(f \circ g)(x,y) = f(g(x,y))$ kontinu di (a,b).

Contoh: Jelaskan kekontinuan fungsi $f(x,y) = \cos(x^3 - 4xy + y^2)$

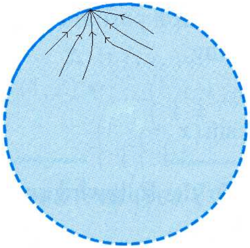
Jawab: Nyatakan $f(x,y) = (g \circ h)(x,y)$ dengan $h(x,y) = x^3 - 4xy + y^2$ dan $g(x) = \cos x$.

Fungsi h kontinu di sebarang titik $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, dan fungsi g kontinu diseluruh $\mathbb{R}$, maka fungsi f kontinu di setiap titik pada $\mathbb{R}^2$.

Kekontinuan Fungsi Dua Peubah di Himpunan

Fungsi dua peubah $z = f(x,y)$ disebut kontinu di $S \subset \mathbb{R}^2$ bila f kontinu pada setiap titik pada S.

Bila S memiliki ”batas”, maka proses limit hanya dilakukan sepanjang jalur yang berada dalam S saja.

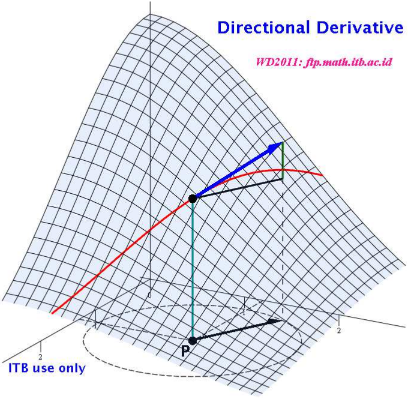


Sifat: Misalkan $f(x,y)$ fungsi dua peubah.
Bila f_{xy} dan f_{yx} kontinu pada *himpunan buka* S, maka $f_{xy} = f_{yx}$.

Turunan Berarah

Konsep turunan berarah bertujuan untuk mengetahui laju perubahan nilai fungsi dua peubah/lebih di suatu titik pada arah tertentu.

Animasi turunan berarah ♠. Contoh pada masalah sehari-hari ♠.



Perhatikan permukaan $z = f(x,y)$

$P(a,b)$ titik pada daerah definisi f

$\vec{u}$ vektor satuan yang berpangkal di P

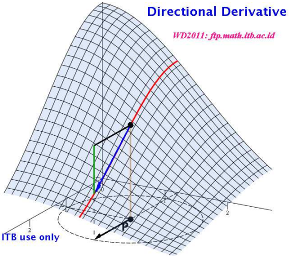
Iriskan permukaan tersebut dengan bidang tegak yang melalui P dan searah dengan $\vec{u}$. Hasilnya berupa sebuah kurva.

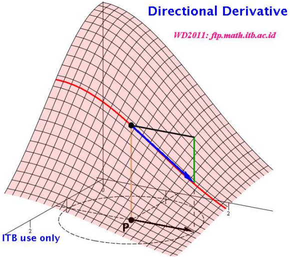
Buat garis singgung di titik $(a,b,f(a,b))$.

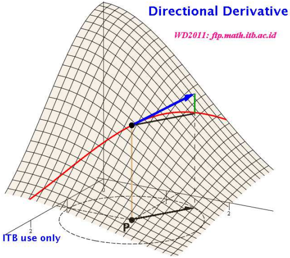
Akan dihitung gradien/tanjakan dari garis singgung tersebut.

Turunan berarah dari $z = f(x,y)$ di titik $P(a,b)$ pada arah vektor satuan $\vec{u}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = D_{\vec{u}} f(P) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{P} + h\vec{u}) - f(\vec{P})}{h} \qquad \text{dengan } \vec{P} = \langle a, b \rangle$$







$\vec{u} = \langle 0, 1 \rangle$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P)$$

$\vec{u} = \langle 1, 0 \rangle$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P)$$

$\vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$

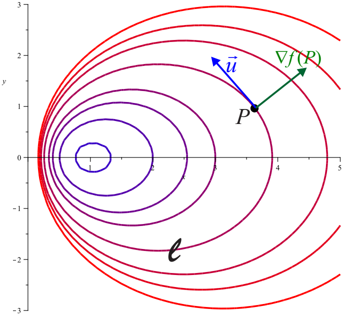
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = \cdots\cdots$$

Teorema: Misalkan $z = f(x,y)$ terdiferensial di sekitar titik P, dan $\vec{u}$ vektor arah satuan maka $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u},}$ $\quad \nabla f(\vec{P}) = \langle f_x(\vec{P}), f_y(\vec{P}) \rangle$

Soal-soal latihan:

1. Misalkan $f(x,y) = 4x^2 - xy + 3y^2$, tentukan $D_u f$ di titik $(2,-1)$
(a.) pada arah $\vec{a} = \langle 4,3 \rangle$ (b.) pada arah menuju titik $(5,3)$.
2. Misalkan $z = f(x,y)$, pada arah manakah $D_{\vec{u}} f(\vec{p})$ maksimum?
3. Diberikan temperatur sebuah keping pada setiap titik (x,y) adalah $T(x,y) = 4x^2 - xy + 3y^2$. Seekor kutu berada di posisi $(1,2)$. Pada arah manakah dia harus bergerak agar mengalami penurunan temperatur terbesar.
4. Alief sedang berada pada lereng gunung Bromo. Bila Dia bergerak ke utara, laju perubahan ketinggiannya adalah 0,7 meter/detik, sedangkan bila bergerak ke arah barat laju perubahan ketinggiannya 0,5 meter/detik. Tentukan laju perubahan ketinggian gunung bila dia bergerak ke arah timur laut. *Petunjuk: gambarkan arah mata angin dengan arah timur dan utara masing-masing menggambarkan sumbu x positif dan y positif*

Turunan Berarah vs Vektor Gradien:



Perhatikan kurva ketinggian dengan level ℓ dari fungsi $z = f(x,y)$.

Titik $P(a,b)$ berada pada kurva tersebut.

$\vec{u}$ vektor singgung satuan satuan di titik P.

Nilai $D_{\vec{u}} f(P) = 0$, mengapa ?

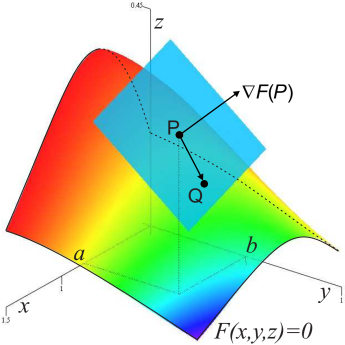
Dilain pihak $D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

Jadi $\nabla f(P) \cdot \vec{u} = 0$

Kesimpulan: $\nabla f(P)$ tegak lurus terhadap lengkungan ℓ

Perluasan konsep: Misalkan $F(x,y,z) = k$ sebuah permukaan dan P sebarang titik di permukaan tersebut, maka $\nabla F = < F_x(P), F_y(P), F_z(P) >$ tegak lurus permukaan di titik P. Bukti ♠.

Latihan: Diberikan fungsi $z = \frac{x^2}{4} + y^2$. Tentukan vektor gradien di titik $(2,1)$, lalu gambarkan kurva ketinggian beserta vektor gradiennya.



Bidang Singgung

Perhatikan grafik permukaan $F(x,y,z) = 0$

$P(a,b,c)$ titik pada permukaan tersebut.

Dibuat bidang singgung yang melalui titik P.

Bagaimana menentukan persamaan bidang singgung tersebut?

$\nabla F(P)$ tegak lurus permukaan $F(x,y,z) = 0$.

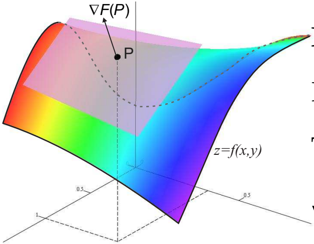
Jadi $\nabla F(P)$ adalah vektor normal dari bidang singgung.

Tetapkan sebarang titik $Q(x,y,z)$ pada bidang singgung tersebut.

Jelas $\nabla F(P)$ tegak lurus $\overrightarrow{PQ}$.

Jadi $\nabla F(P) \cdot < x-a, y-b, z-c > = 0$.

$$< \frac{\partial F}{\partial x}(P), \frac{\partial F}{\partial y}(P), \frac{\partial F}{\partial z}(P) > \cdot < x-a, y-b, z-c > = 0 \qquad \blacksquare$$



Bidang singgung pada permukaan $z = f(x,y)$

Misalkan $P(a,b,c)$ titik pada permukaan.

Tulis $z = f(x,y)$ sebagai $F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$.

$\nabla F =< \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 >$

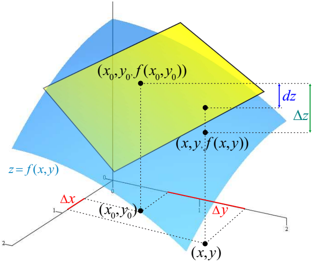
Persamaan bidang: $< \frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P), -1 > \cdot < x-a, y-b, z-c >= 0$

Soal-soal latihan:

1. Tentukan persamaan bidang singgung terhadap $x^2 + y^2 + 2z^2 = 23$ di titik $(1,2,3)$.
2. Tentukan persamaan bidang singgung terhadap $z = x^2 + y^2$ di titik $(1,1,2)$.
3. Tentukan persamaan bidang singgung yang sejajar dengan bidang *xoy* terhadap $z = x^2 - 2xy - y^2 - 8x + 4y$.

Diferensial Total dan Aproksimasi

Sebelum membahas konsep aproksimasi, amatilah visualisasi berikut: ♠



Diberikan fungsi dua peubah $z = f(x,y)$.

Titik (x_0,y_0) dan (x,y) di domain f.

Diferensial dari **peubah bebas** x dan y,

$$dx = \Delta x = x - x_0$$

$$dy = \Delta y = y - y_0$$

Pada **peubah tak bebas** z, nilai Δz dan dz tidak sama.

$\Delta z = f(x,y) - f(x_0,y_0)$, perbedaan nilai fungsi pada permukaaan $z = f(x,y)$.

Persamaan bidang singgung: $z - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)dx + f_y(x_0,y_0)dy$.

Pada gambar di atas $z - f(x_0,y_0)$ adalah segmen dz, jelaskan?

$dz = f_x(x_0,y_0)dx + f_y(x_0,y_0)dy$ disebut diferensial total dari fungsi f.

Misalkan f terdiferensialkan di lingkungan yang memuat (x_0, y_0) dan (x, y).

Bila $|(x,y)-(x_0,y_0)| \to 0$ maka $|\Delta z - dz| \to 0$, mengapa?

Jadi untuk keperluan aproksimasi, digunakan hubungan

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \Delta z \approx dz = f_x(x_0,y_0)\,dx + f_y(x_0,y_0)\,dy.$$

Latihan:

1. Misalkan $z = 2x^3 + xy - y^3$. Tentukan Δz dan dz bila (x, y) berubah dari $(2, 1)$ ke $(2,03; 0,98)$.
2. Gunakan hampiran diferensial total untuk menghitung $\sqrt{3{,}9 \cdot 9{,}1}$.

Aturan Rantai

Aturan ini berfungsi untuk menentukan turunan dari sebuah fungsi komposisi.

Berdasarkan jenis fungsi komposisinya, dikenal 2 jenis aturan rantai.

Aturan Rantai jenis 1

Diberikan fungsi $z = f(x,y)$ dengan $x = x(t)$ dan $y = y(t)$.

Perhatikan bahwa terhadap peubah t, f merupakan fungsi satu peubah.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Latihan:

1. Misalkan $z = x^3 y$ dengan $x = 2t$ dan $y = t^2$. Tntukan $\frac{dz}{dt}$.
2. Sebuah silinder jari-jari alasnya $r = 10$ cm dan tingginya $h = 100$ cm. Silinder tersebut dipanaskan sehingga memuai dengan laju pertambahan jari-jarinya 0,2 cm/jam dan laju pertambahan tingginya 0,5 cm/jam. Tentukan laju pertambahan volumenya setiap saat.

Penurunan Fungsi Implisit Memakai Aturan Rantai jenis 1

Diberikan fungsi satu peubah dalam bentuk imlisit $F(x,y) = 0$.

Pada persamaan di atas tersirat $x = x$ dan $y = y(x)$.

Turunkan $F(x,y) = 0$ terhadap x memakai aturan rantai jenis 1.

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Dengan mengingat $\frac{dx}{dx} = 1$, diperoleh

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Dari persamaan terakhir, $\frac{dy}{dx}$ dapat ditentukan.

Latihan: Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $x^3 + x^2y - 10y^4 = 0$

Aturan Rantai jenis 2

Diberikan fungsi $z = f(x,y)$ dengan $x = x(s,t)$ dan $y = y(s,t)$.

Perhatikan bahwa terhadap peubah (s,t), f merupakan fungsi dua peubah.

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Latihan: Misalkan $z = x^3 y$ dengan $x = 2s + 7t$ dan $y = 5st$.

Tentukan $\frac{\partial z}{\partial s}$ dan $\frac{\partial z}{\partial t}$.

Penurunan Fungsi Implisit Memakai Aturan Rantai jenis 2

Diberikan fungsi dua peubah dalam bentuk imlisit $F(x,y,z)=0$.

Pada persamaan di atas tersirat $x=x$, $y=y$, dan $z=f(x,y)$.

Turunkan $F(x,y,z)=0$ terhadap x dan y memakai aturan rantai jenis 2.

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

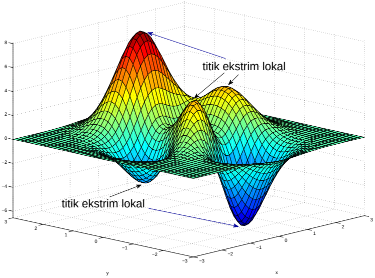
Dengan mengingat $\frac{\partial x}{\partial x}=1$ dan $\frac{\partial y}{\partial y}=1$, diperoleh

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dy}=0$$

Dari persamaan terakhir, $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dapat ditentukan.

Latihan: Tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dari $x^3e^{y+z}-y\sin(x-z)=0$

Maksimum dan Minimum Fungsi Dua Peubah



Perhatikan grafik permukaan $z = f(x,y)$

f dikatakan mencapai maksimum di p_0 bila $f(p_0) \geq f(p)\ \forall\, p \in D_f$.
$f(p_0)$ disebut nilai maksimum.

f dikatakan mencapai *minimum* di p_0 bila $f(p_0) \leq f(p)\ \forall\, p \in D_f$.
$f(p_0)$ disebut nilai minimum.

f dikatakan mencapai maksimum lokal di p_0 bila $f(p_0) \geq f(p)$ untuk semua titik p *di sekitar* p_0. $f(p_0)$ disebut nilai maksimum lokal.

f dikatakan mencapai minimum lokal di p_0 bila $f(p_0) \leq f(p)$ untuk semua titik p *di sekitar* p_0. $f(p_0)$ disebut nilai minimum lokal

Untuk selanjutnya titik maksimum/minimum disebut titik ekstrim.

Titik ekstrim tidak selalu ada (berikan contoh).

Bila daerah definisi dari $f(x,y)$ berupa **himpunan tertutup** dan **terbatas**, maka titik ekstrim dijamin ada.

(*Teorema titik kritis*). Titik ekstrim selalu merupakan salah satu dari:

a. Titik stasioner, yaitu titik yang memenuhi hubungan $\nabla F = 0$

b. Titik singular, yaitu titik yang turunannya tidak ada

c. Titik *batas* dari D_f

Contoh: Tentukan titik ekstrim lokal dari $f(x,y) = x^2 - 2x + \frac{y^2}{4}$.

$f_x(x,y) = 2x - 2$ dan $f_y(x,y) = \frac{y}{2}$. Titik stasioner $(1,0)$ dan $f(1,0) = -1$

Titik singular dan titik batas tidak ada.

$f(x,y) = x^2 - 2x + \frac{y^2}{4} = x^2 - 2x + 1 + \frac{y^2}{4} - 1 = (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} - 1 \geq -1$

Jadi $(1,0)$ merupakan titik minimum, dan tidak ada titik maksimum.

Teorema Pengujian titik ekstrim lokal

Misalkan $f(x,y)$ mempunyai turunan parsial kedua yang kontinu disekitar titik stasioner $p_0(x_0,y_0)$. Tetapkan $D = f_{xx}(p_0)f_{yy}(p_0) - f_{xy}^2(p_0)$, maka

a. Jika $D > 0$ dan $f_{xx}(p_0) < 0$, maka p_0 titik maksimum lokal.
b. Jika $D > 0$ dan $f_{xx}(p_0) > 0$, maka p_0 titik minimum lokal.
c. Jika $D < 0$, maka p_0 titik pelana (bukan titik ekstrim).
d. Jika $D = 0$, tidak ada kesimpulan.

Latihan:

1. Tentukan titik ekstrim lokal / titik pelana dari $z = \frac{-x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.
2. Tentukan titik pada $z^2 = x^2y + 4$ yang jaraknya paling dekat ke titik asal.
3. Tentukan titik ekstrim dari $f(x,y) = 2 + x^2 + y^2$ pada daerah $S = \{(x,y) : x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1\}$
   petunjuk: untuk mencari titik ekstrim pada batas S, gunakan substitusi $x = \cos t$ *dan* $y = 2\sin t$ *dengan* $0 \le t \le 2\pi$.

Matriks dan Model pertumbuhan Leslie

Warsoma Djohan

Prodi Matematika, FMIPA - ITB

January 21, 2016

Matriks

- **Matriks**: kumpulan bilangan yang disusun dalam bentuk persegi panjang.
- Matriks biasa ditulis menggunakan huruf besar dengan cetakan tebal.
- Contoh: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 7 & 2 \\ -2 & 7 & 6 & -4 \\ 8 & -7 & 3 & -1 \\ -5 & 5 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 3 & 8 \end{bmatrix}$
- Ukuran matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan kolomnya.
  Pada contoh 1, ukuran matriks $\mathbf{A}$ adalah 5×4, dinotasikan $\mathbf{A}_{5\times 4}$.
- Elemen/anggota sebuah matriks $\mathbf{A}$ ditulis memakai huruf kecil, a_{ij}.
  $a_{2,3}$ artinya elemen pada baris ke 2 kolom ke 3, pada contoh 1 nilainya 6.

Jenis-Jenis Matriks

- **Matriks bujur sangkar**: matriks dengan ukuran baris dan kolom sama.

  Contoh: $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ matriks bujur sangkar 2×2.
- **Matriks diagonal**: matriks dengan sifat $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.
- **Matriks segitiga atas**: matriks dengan sifat $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$.
- **Matriks Baris**: matriks yang terdiri dari satu baris.
- **Matriks kolom / Vektor**: matriks yang terdiri dari satu kolom.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}}_{\text{Matriks diagonal}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -3 & 7 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\text{Matriks segitiga atas}} \quad \underbrace{[2\ 8\ 1\ 4\ 5]}_{\text{matriks baris}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -9 \end{bmatrix}}_{\text{vektor}}$$

Operasi Pada Matriks

- Misalkan **A** dan **B** dua matriks dengan ukuran $n \times m$ dan $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\lambda\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda\, a_{11} & \lambda\, a_{12} & \cdots & \lambda\, a_{1m} \\ \lambda\, a_{21} & \lambda\, a_{22} & \cdots & \lambda\, a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda\, a_{n1} & \lambda\, a_{n2} & \cdots & \lambda\, a_{nm} \end{bmatrix}$$

Perkalian Dua Buah Matriks

- Misalkan $\mathbf{A}_{n\times k}$ dan $\mathbf{B}_{k\times m}$.

  Matriks $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ adalah matriks berukuran $n \times m$ dengan
  $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$

  c_{ij} : baris ke i dari matriks A kali kolom ke j dari matriks B

- Contoh:
$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 7 \\ -2 & 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & -28 \\ 48 & 13 \end{bmatrix}$$

- **Catatan**:
  1. Perkalian dua matriks **AB** hanya terdefinisi bila jumlah kolom matriks **A** sama dengan jumlah baris dari matriks **B**.
  2. Secara umum $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

Matriks Identitas/Satuan dan Matriks Invers

- **Matriks Satuan/Identitas I** adalah matriks diagonal dengan semua elemen diagonal bernilai 1. $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Misalkan $\mathbf{A}$ sebuah matriks, maka $\mathbf{AI} = \mathbf{IA}$
- Matriks $\mathbf{B}$ disebut **matriks invers** dari matriks $\mathbf{A}$ bila $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$.

  Matriks invers dari matriks $\mathbf{A}$ biasa ditulis $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -6 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{15} & -\frac{11}{30} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{15} & \frac{7}{30} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{15} & -\frac{11}{30} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{15} & \frac{7}{30} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -6 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \mathbf{I}$$

- Kajian tentang matriks invers akan dibahas lebih detail di belakang.

Leslie Model of Growth

In applied mathematics, the Leslie matrix is a discrete, age-structured model of population growth that is very popular in population ecology. It was invented by and named after **Patrick H. Leslie**. The Leslie matrix (also called the Leslie Model) is one of the best known ways to describe the growth of populations (and their projected age distribution), in which a population is closed to migration and where only one sex, usually the female, is considered.

The Leslie Matrix is used in ecology to model the changes in a population of organisms over a period of time. The population is divided into groups based on age classes. At each time step, the population is represented by a vector with an element for each age classes where each element indicates the number of individuals currently in that class.

Model Pertumbuhan Populasi

Model Pertumbuhan Eksponensial : Laju pertumbuhan populasi suatu spesies berbanding lurus dengan jumlah populasi. saat itu.

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad \text{dengan solusi} \quad y = c \cdot e^{kt}$$

Kelemahan model ini, semua spesies baik yang masih sangat muda atau yang terlalu tua kesuburannya disamakan.

Model Pertumbuhan Leslie: Pada model ini populasi diklasifikasikan berdasarkan kategori umur. Selanjutnya tingkat produktivitas dan tingkat daya tahan hidup dari masing-masing kelas diperhitungkan.

$$\begin{bmatrix} \text{Tingkat kelahiran dari populasi muda} & \text{Tingkat kelahiran dari populasi dewasa} \\ \text{Daya tahan hidup populasi muda} & \text{Daya tahan hidup populasi dewasa} \end{bmatrix}$$

Matriks Leslie untuk populasi *ovenbird* yang awalnya terdiri dari 100 burung muda dan 200 burung dewasa diketahui sebagai berikut: $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0,8 & 1,2 \\ 0,6 & 0,5 \end{bmatrix}$

a. Jelaskan arti matriks tersebut.

b. Tentukan jumlah burung muda dan dewasa pada periode / tahun berikutnya.

$0,8$: proporsi kelahiran burung dari angkatan muda.

$1,2$: proporsi kelahiran burung dari angkatan dewasa.

$0,6$: proporsi angkatan muda yang bertahan dan jadi dewasa.

$0,5$: proporsi angkatan dewasa yang dapat bertahan hidup.

Jumlah burung muda di tahun berikutnya = $0,8 \cdot 100 + 1,2 \cdot 200 = 320$ ekor

Jumlah burung dewasa di tahun berikutnya = $0,6 \cdot 100 + 0,5 \cdot 200 = 160$ ekor

Misalkan pada contoh sebelumnya kita nyatakan populasi ovenbird tersebut dalam notasi vektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix}$

v_1 menyatakan jumlah populasi burung muda saat ini.

v_2 menyatakan jumlah populasi burung dewasa saat ini.

Jumlah populasi burung muda dan dewasa di tahun berikutnya dapat dihitung sebagai berikut:

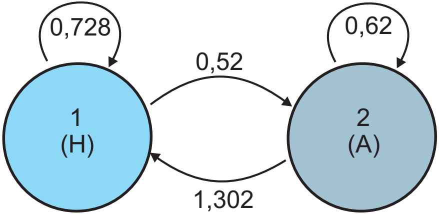
$$\mathbf{G}\,\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0,8 & 1,2 \\ 0,6 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \cdot 100 + 1,2 \cdot 200 \\ 0,6 \cdot 100 + 0,5 \cdot 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 320 \\ 160 \end{bmatrix}$$

Prediksi jumlah populasi ovenbird dua tahun yang akan datang:

$$\mathbf{G}\left(\mathbf{G}\,\mathbf{v}\right) = \begin{bmatrix} 0,8 & 1,2 \\ 0,6 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 320 \\ 160 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \cdot 320 + 1,2 \cdot 160 \\ 0,6 \cdot 320 + 0,5 \cdot 160 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 448 \\ 272 \end{bmatrix}$$

Diagram Leslie

Selain menggunakan notasi matriks, para ahli biologi sering menggambarkan model perkembangan spesies memakai diagram Leslie sebagai berikut:



populasi muda populasi dewasa

Matriks Leslie yang berpadanan:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0.728 & 1.302 \\ 0,52 & 0,62 \end{bmatrix}$$

Elemen g_{ij} dari matriks Leslie berpadanan dengan gambar panah dari j ke i, bukan dari i ke j.

Latihan: Bila pada tahun pertama terdapat 60 spesies muda dan 36 dewasa, tentukan jumlah masing-masing populasi di tahun ke tiga.

Jawab: $$\begin{bmatrix} 0.728 & 1.302 \\ 0,52 & 0,62 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.728 & 1.302 \\ 0,52 & 0,62 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 36 \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 135,6 \\ 80,3 \end{bmatrix}$$

Prediksi Populasi di Masa Lampau

Selain untuk memprediksi jumlah populasi di masa yang akan datang, diagram Leslie dapat digunakan untuk menentukan populasi di masa lampau.

Misalkan matriks Leslie untuk perkembangan spesies ovenbird adalah sebagai berikut: $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0,8 & 1,2 \\ 0,6 & 0,5 \end{bmatrix}$

Bila saat ini jumlah populasi muda 100 dan populasi dewasa 150, berapakah jumlah populasi di tahun sebelumnya?

Pada masalah ini, kita harus menentukan nilai x (jumlah populasi muda) dan y (jumlah populasi dewasa) supaya:

$$\mathbf{G}\,\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0,8 & 1,2 \\ 0,6 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0,8x + 1,2y = 100 \\ 0,6x + 0,5y = 150 \end{cases}$$

Bentuk terakhir dinamakan Sistem Persamaan Linear.

Sistem Persamaan Linear (SPL)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3m}x_m = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

SPL dengan m variabel.

Jumlah persamaan: n buah.

n tidak perlu sama dengan m

Contoh-contoh:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y - 2z = -4 \\ x - 6y - 7z = 12 \\ -2x + 4y + 9z = 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8x + 4y = 12 \\ 5x - 6y = -1 \end{cases}$$

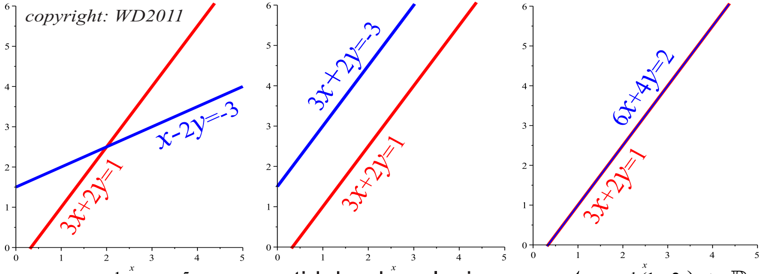
Tujuan: Mencari solusinya, yaitu bilangan-bilangan $x_1, x_2, \cdots, x_n$ yang "memenuhi" SPL tersebut.

Pada contoh pertama, solusinya: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, dan $x_3 = 3$ Periksa!.

SPL Konsisten dan Tak Konsisten

Perhatikan tiga buah SPL berikut dan carilah solusinya.

$$\begin{cases} 3x+2y = 1 \\ x-2y = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+2y = 1 \\ 3x+2y = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+2y = 1 \\ 6x+4y = 2 \end{cases}$$



$x=-\frac{1}{2}, y=\frac{5}{4}$ tidak ada solusi $x=t,\ y=\frac{1}{2}(1-3t),\ t\in\mathbb{R}$

SPL disebut konsisten bila memiliki solusi, sebaliknya disebut Tak konsisten.

Diskusi: Adakah SPL yang solusinya lebih dari satu tapi berhingga buah ?

Representasi SPL dalam bentuk Matriks Lengkap

$$\underbrace{\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3m}x_m = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}}_{\text{Sistem Persamaan Linear}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & + & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & + & a_{2m} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & + & a_{3m} & b_3 \\ & & \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & + & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}}_{\text{Matriks Lengkap SPL}}$$

Penulisan dalam bentuk matriks bermanfaat untuk memudahkan pencarian solusi SPL.

Sistem Persamaan Linear (SPL) Segitiga Atas

$$\underbrace{\begin{aligned} 2x_1-3x_2+4x_3+\ x_4 &= -10 \\ 4x_2-2x_3-6x_4 &= \ \ 22 \\ 4x_3-2x_4 &= \ \ \ 0 \\ 5x_4 &= -10 \end{aligned}}_{\text{SPL segitiga atas}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 & -10 \\ 0 & 4 & -2 & -6 & 22 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 \end{bmatrix}}_{\text{Matriks lengkap SPL}}$$

Penyelesaian: metode **Penyulihan Mundur (Back Substitution)**

$$x_4 = \frac{-10}{5} = -2$$

$$x_3 = \frac{0+2x_4}{4} = \frac{0+2\cdot(-2)}{4} = -1$$

$$x_2 = \frac{22+2x_3+6x_4}{4} = \frac{22+2\cdot(-1)+6\cdot(-2)}{4} = 2$$

$$x_1 = \frac{-10+3x_2-4x_3-x_4}{2} = \frac{-10+3\cdot 2-4(-1)-(-2)}{2} = 1$$

Penyelesaian SPL Umum, Operasi Baris Elementer (OBE)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} & b_3 \\ & & \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}}_{\text{SPL umum}} \underset{OBE}{\approx} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3m} & b_3 \\ & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}}_{\text{SPL segitiga atas}}$$

Operasi Baris Elementer

- Menukar baris ke i dengan baris ke j
- Mengalikan baris ke i dengan sebuah konstanta tak nol k.
- Menambahkan/mengurangkan k kali baris ke i pada baris ke j.

Sifat: OBE tidak merubah solusi sebuah SPL.

Sistem Persamaan Linear Umum: Metode Eliminasi Gauss

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \quad \boxed{B_2 := B_2 - 2 \cdot B_1} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_2 - 7x_3 = -17 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \quad \boxed{B_3 := B_3 - 3 \cdot B_1}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_2 - 7x_3 = -17 \\ 3x_2 - 11x_3 = -27 \end{cases} \quad \boxed{B_3 := 2 \cdot B_3 - 3 \cdot B_2} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_2 - 7x_3 = -17 \\ - x_3 = -3 \end{cases}$$

Terapkan penyulihan mundur, diperoleh $x_3 = 3$, $x_2 = 2$, dan $x_1 = 1$.

Eliminasi Gauss Memakai Notasi Matriks Lengkap

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad \boxed{B_2 := B_2 - 2 \cdot B_1} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad \boxed{B_3 := B_3 - 3 \cdot B_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \quad \boxed{B_3 := 2 \cdot B_3 - 3 \cdot B_2} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Selesaikan SPL berikut dengan eliminasi Gauss: $\begin{cases} 2x_2+3x_3-x_4=-6 \\ 4x_1+x_2+x_3+5x_4=7 \\ 8x_1+2x_2+x_3=5 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 & -6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \boxed{B_1 \leftrightarrow B_2} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & -6 \\ 8 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \boxed{\begin{array}{l} B_3 := B_3 - 2\cdot B_1 \\ B_4 := 4\cdot B_4 - B_1 \end{array}}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -10 & -9 \\ 0 & 7 & 11 & 11 & -7 \end{bmatrix} \boxed{B_4 := 2\cdot B_4 - 7\cdot B_2} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 29 & 28 \end{bmatrix} \boxed{B_4 := B_4 + B_3}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & 19 \end{bmatrix}$$

$$x_4 = 19/19 = 1$$
$$x_3 = (-9+10\cdot 1)/(-1) = -1$$
$$x_2 = (-6-3\cdot(-1)+1\cdot 1)/2 = -1$$
$$x_1 = (7-1\cdot(-1)-1\cdot(-1)-5\cdot 1)/4 = 1$$

Contoh SPL Tak Konsisten

Tentukan solusi SPL berikut dengan eliminasi Gauss: $\begin{cases} x_1 \quad +x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + 2x_2 \quad = 3 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \boxed{B_3 := B_3 + 2 \cdot B_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix} \boxed{B_3 := B_3 - 2 \cdot B_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Persamaan terakhir dari hasil eliminasi Gauss memberikan hubungan: $0 \cdot x_3 = 1$

Ini berarti SPL di atas tidak punya solusi (*SPL tidak konsisten*).

Contoh SPL Dengan Banyak Solusi

Tentukan solusi SPL berikut dengan eliminasi Gauss: $\begin{cases} x_1 \quad + x_3 = 2 \\ \quad x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 \quad 2x_3 = 5 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \boxed{B_3 := B_3 - \cdot B_1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \boxed{B_3 := B_3 - B_2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Persamaan terakhir dari hasil eliminasi Gauss memberikan hubungan: $0 \cdot x_3 = 0$

Hubungan ini dipenuhi oleh sebarang bilangan real.

Jadi pilih $x_3 = t, \ t \in \mathbb{R}$.

$x_2 = (3 - 1 \cdot t)/1 = 3 - t$

$x_1 = (2 - 1 \cdot t)/1 = 2 - t$

SPL di atas adalah contoh SPL dengan banyak solusi.

Discuss *Bittinger*, Calculus for the Life Sciences, page 454, example 10

Matriks Invers

Misalkan $\mathbf{A}_{n\times n}$ sebuah matriks. Matriks $\mathbf{B}_{n\times n}$ disebut matriks invers dari $\mathbf{A}$ bila memenuhi $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ dengan $\mathbf{I}$ matriks identitas.

Matriks invers dari $\mathbf{A}$ umumnya dilambangkan $\mathbf{A}^{-1}$.

Contoh: Bila $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, tunjukkan $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & 3 \\ -\frac{3}{2} & 5 & 9 \\ \frac{1}{2} & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Sebuah matriks belum tentu memiliki invers

Tunjukkan bahwa matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ tidak memiliki invers.

Matriks $\mathbf{A}$ disebut tak singular/invertible bila memiliki invers.

Matriks $\mathbf{A}$ disebut singular/non-invertible bila tidak memiliki invers.

Invers Matriks 2×2

Misalkan $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Jika $ad - bc \neq 0$ maka $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Periksa dan tentukan invers dari matriks-matriks berikut :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jawab:

Matriks **A** memiliki invers sebab $4 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 6 \neq 0$.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriks **B** tidak memiliki invers sebab $4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 0$.

Invers Matriks Ukuran Sebarang

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & & & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]}_{\text{Matriks yang diperluas}} \underset{OBE}{\approx}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ & & \vdots & & & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right]$$

Matriks **B** merupakan invers dari matriks **A**.

Contoh:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -17 & 11 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 11 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \boxed{B_2 := 2 \cdot B_2 + B_1}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -17 & 11 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \boxed{B_3 := 5 \cdot B_3 - 3 \cdot B_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -17 & 11 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -6 & 5 \end{array}\right] \boxed{B_3 := B_3/(-1)}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -17 & 11 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \boxed{B_2 := B_2 + 3 \cdot B_3} \\ \boxed{B_1 := B_1 - 11 \cdot B_3} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -17 & 0 & -32 & -66 & 55 \\ 0 & 5 & 0 & 10 & 20 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & -5 \end{array}\right] \quad \boxed{B_2 := B_2/5}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -17 & 0 & -32 & -66 & 55 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & -5 \end{array}\right] \quad \boxed{B_1 := B_1 + 17 \cdot B_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & -5 \end{array}\right] \quad \boxed{B_1 := B_1/2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & -5 \end{array}\right]$$

Matriks Invers untuk Menentukan Populasi Dimasa Lampau

Populasi dari *cerulean warbler* dibagi atas tiga group yaitu: usia sampai satu tahun (H), usia sampai 2 tahun (S), dan usia di atas dua tahun (A). Matriks Leslie-nya adalah: $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0,76 & 0,95 \\ 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,91 & 0,91 \end{bmatrix}$.

Bila jumlah populasi saat ini: H=408, S=20, A=428, dan diketahui

$\mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -5,26 & 0 & 5,50 \\ 5,26 & 0 & -4,40 \end{bmatrix}$ Tentukan populasi di tahun berikutnya dan di tahun sebelumnya.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0,76 & 0,95 \\ 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,91 & 0,91 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 408 \\ 20 \\ 428 \end{bmatrix}}_{\text{populasi tahun berikutnya}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -5,26 & 0 & 5,50 \\ 5,26 & 0 & -4,40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 408 \\ 20 \\ 428 \end{bmatrix}}_{\text{populasi tahun sebelumnya}}$$

Bagaimanakah menghitung populasi dua tahun sebelumnya ?

Determinan

- Determinan dari sebuah matriks $\mathbf{A}_{n\times n}$ disimbolkan dengan $|\mathbf{A}|$ atau $\det(\mathbf{A})$.
- Bila $\mathbf{A} = [a]$ (matriks ukuran 1×1), $|\mathbf{A}| = a$.
- Determinan matriks 2×2: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & c \end{vmatrix} = a\cdot b - b\cdot c$
- Determinan matriks 3×3:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$

- Tentukan $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ dan $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -2 & 7 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix}$
- $\mathbf{A}$ matriks yang tak-singular $\Longleftrightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0$

Determinan Matriks Segitiga Atas

- Determinan matriks ukuran lebih dari 3×3 memerlukan konsep *kofaktor* dan *minor*. Bagian ini tidak akan dibahas.
- Hal khusus, bila matriks **A** berbentuk segitiga atas.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}$$

Masalah Nilai Eigen/Karakteristik

- Diberikan matriks $\mathbf{A}_{n\times n}$. Masalah nilai eigen adalah masalah mencari **bilangan real r** dan **vektor tak nol v** yang memenuhi hubungan $\mathbf{A}\mathbf{v} = r\,\mathbf{v}$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -9 & 6 & 20 \\ 2 & 2 & -4 \\ -6 & 3 & 13 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \underbrace{2}_{r} \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}}$$

- Bilangan r dan vektor $\mathbf{v}$ tersebut disebut **pasangan eigen** dari matriks $\mathbf{A}$.
- Banyaknya pasangan eigen dari matriks ukuran $n \times n$ paling banyak n buah.
- Misalkan $\mathbf{A}_{n\times n}$ **matriks segitiga atas** maka nilai eigennya $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$.
- OBE **tidak** mengawetkan nilai eigen, jadi tidak dapat digunakan.
- Misalkan r nilai eigen dari matriks $\mathbf{A}$ maka $\det(\mathbf{A} - r\,\mathbf{I}) = 0$.
- Misalkan r nilai eigen dari matriks $\mathbf{A}$ maka *solusi tak nol* dari SPL $(\mathbf{A} - r\,\mathbf{I})\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$ adalah vektor eigen dari $\mathbf{A}$.

Latihan: Tentukan pasangan eigen dari $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & 18 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$

$$|\mathbf{A} - r\,\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -7-r & 18 \\ -3 & 8-r \end{vmatrix} = (-7-r)\,(8-r) - 18\,(-3) = (r-2)\,(r+1)$$

Selesaikan $|\mathbf{A} - r\,\mathbf{I}| = 0 \Longleftrightarrow (r-2)\,(r+1) = 0 \Longleftrightarrow r_1 = 2,\ r_2 = -1$

Mencari vektor eigen untuk $r_1 = 2$

$$(\mathbf{A} - r_1\,\mathbf{I})\,\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -9 & 18 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \mathbf{v}_1 = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

Mencari vektor eigen untuk $r_2 = -1$

$$(\mathbf{A} - r_2\,\mathbf{I})\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -6 & 18 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \mathbf{v}_2 = t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

Misalkan $\mathbf{v}$ vektor eigen dari $\mathbf{A}$ dan $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, maka $t\,\mathbf{v}$ juga merupakan vektor eigen dari $\mathbf{A}$.

Latihan: Tentukan pasangan eigen dari $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 4 & -5 & -2 \\ 8 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

$$|\mathbf{A} - r\,\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-r & -2 & -2 \\ 4 & -5-r & -2 \\ 8 & -4 & 5-r \end{vmatrix}$$

Selesaikan $|\mathbf{A} - r\,\mathbf{I}| = 0$

Diperoleh nilai-nilai eigen: $r_1 = -3, r_2 = 3, r_3 = 1$

Mencari Vektor eigen $\Longleftrightarrow$ menyelesaikan SPL $(\mathbf{A} - r\,\mathbf{I})\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Diperoleh vektor-vektor eigen:

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}, t \neq 0$$

Nilai Eigen dan Model Pertumbuhan

Misalkan $\mathbf{G}$ matriks Leslie dari masalah pertumbuhan populasi dan $\mathbf{p}$ vektor populasi ditahun pertama. Prediksi populasi setelah n periode adalah $\mathbf{G}^n\,\mathbf{p}$.

Pola perhitungan di atas memiliki beberapa kelemahan:

- Untuk periode yang panjang hitungannya tidak efisien.
- Tidak dapat dipakai memprediksi jumlah populasi untuk $t \to \infty$.

Teorema berikut memberikan alternatif hitungan yang lebih efisien.

Teorema

Misalkan Matriks Leslie $\boldsymbol{G}$ untuk masalah populasi memiliki nilai eigen $r_1, r_2, \cdots, r_m$ dengan vektor eigen $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$. Misalkan vektor populasi saat awal adalah $\boldsymbol{p}$. Nyatakan vektor populasi tersebut dalam bentuk kombinasi linear sebagai berikut: $\boldsymbol{p} = a_1\,\boldsymbol{v}_1 + a_2\,\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_m\,\boldsymbol{v}_m$. Vektor populasinya setelah n periode adalah: $a_1\,r_1^n\,\boldsymbol{v}_1 + a_2\,r_2^n\,\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_m\,r_m^n\,\boldsymbol{v}_m$ ♠

Latihan: Matriks Leslie **G** untuk populasi *ovenbird* yang dibagi atas populasi muda dan dewasa mempunyai nilai eigen 2 dan $\frac{1}{2}$. Vektor-vektor eigennya $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Jika populasi awal $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \text{muda} \\ \text{dewasa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 300 \end{bmatrix}$

a. Tuliskan vektor populasi $\mathbf{p}$ sebagai kombinasi linear dari $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$
b. Tentukan vektor populasinya setelah 10 tahun

Dicari bilangan real a_1 dan a_2, supaya $\mathbf{p} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2$

$$\begin{bmatrix} 400 \\ 300 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 400 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_1 + a_2 \\ a_1 + a_2 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{matrix} a_1 = 100 \\ a_2 = 200 \end{matrix}$$

Vektor populasi setelah 10 tahun adalah

$$100 \cdot 2^{10} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 200 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 204800 \\ 102400 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{25}{128} \\ \frac{25}{128} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 204800 \\ 102400 \end{bmatrix}$$

Untuk jangka waktu panjang, vektor populasi didominasi nilai eigen terbesar.

Laju Pertumbuhan Relatif

Jumlah populasi sebuah spesies merupakan jumlah semua elemen dari vektor populasi.

Laju Pertumbuhan relatif $:= \dfrac{\textbf{Jumlah populasi periode ke n+1}}{\textbf{jumlah populasi tahun ke n}}$

Ilustrasi: jumlah populasi saat ini 100 dan periode/tahun berikutnya 150, maka laju pertumbuhan relatif adalah 150/100 = 1,5

Prosentase Laju Pertumbuhan := (1,5 - 1)· 100% = 50%

Teorema

Misalkan nilai eigen terbesar dari matriks Leslie adalah r, maka untuk $t \to \infty$ laju pertumbuhan relatif akan mendekati nilai r.

Nilai eigen terbesar r disebut **laju pertumbuhan jangka panjang**, jelaskan!

Prosentase laju pertumbuhan jangka panjang adalah $r - 1$. jelaskan!

Latihan: Matriks Leslie untuk *ovenbirds* di *Central Missouri* yang dibagi atas group burung muda dan dewasa adalah $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0.728 & 1.302 \\ 0.52 & 0.62 \end{bmatrix}$.
Tentukan laju pertumbuhan jangka panjangnya dan prosentasenya.

Kita harus menghitung nilai eigen dari matriks **G**.

$$|\mathbf{G} - r\,\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 0,728 - r & 1.302 \\ 0,52 & 0,62 - r \end{vmatrix} = (0,728 - r)\,(0,62 - r) - (1,302)\,(0,52)$$

$|\mathbf{G} - r\,\mathbf{I}| = 0, \Longleftrightarrow r_1 \approx -0,1506$ dan $r_2 \approx 1,4986$.

Jadi laju pertumbuhan jangka panjangnya adalah $1,4986$.

Prosentase laju pertumbuhan jangka panjang $49,86\%$

Hasil terakhir menunjukkan bahwa untuk jangka panjang, populasinya bertambah 49,86% per tahun

Persamaan Beda (Difference Equations)

Tanaman semusim/tahunan hanya hidup pada satu musim. Pada akhir periodenya, tanaman tersebut menghasilkan biji/benih, kemudian mati. Sebagian dari biji tersebut akan bertunas/tumbuh (*germinate*) di tahun berikutnya, sebagian lagi baru akan tumbuh ditahun ketiga, sedangkan sisanya mati. Laju pertumbuhan (*germination rate*) dan banyaknya biji yang dihasilkan bergantung pada beberapa hal, diantaranya kondisi cuaca dan banyaknya biji yang dilahap para burung (birds).

Misalkan disebuah ladang, pada saat awal (tahun ke 0) belum ada pohon, dan pada tahun kesatu ditanam 100 pohon. Notasikan x_n sebagai banyaknya pohon pada tahun ke n. Jadi $x_0 = 0$ dan $x_1 = 100$.

Setiap pohon rata-rata menghasilkan 5 biji. 15% diantaranya tumbuh pada tahun berikutnya, 6% tumbuh pada tahun ketiga sedangkan sisanya mati. Jadi, rata-rata sebuah pohon menghasilkan (0,15)(5) = 0,75 biji yang tumbuh di tahun kedua dan (0,06)(5)=0,3 biji yang tumbuh ditahun ketiga.

Jumlah tanaman pada tahun ke n dapat dihitung sebagai berikut:

$$\begin{cases} x_0 &= 0 \\ x_1 &= 100 \\ x_2 &= 0,75x_1 + 0,3x_0 = 0,75(100) + 0,3(0) = 75 \\ x_3 &= 0,75x_2 + 0,3x_1 = 0,75(75) + 0,3(100) = 86.25 \\ x_4 &= 0,75x_3 + 0,3x_2 = 0,75(86.25) + 0,3(75) = 87.19 \\ x_5 &= 0,75x_4 + 0,3x_3 = 0,75(87,19) + 0,3(86,25) = 91.27 \end{cases}$$

Jumlah tanaman pada tahun ke $n+1$: $\underbrace{x_{n+1} = 0,75x_n + 0,3x_{n-1},}_{\text{Persamaan Beda}}$ (*)

Bentuk persamaan (*), di mana jumlah tanaman bergantung pada jumlah tanaman ditahun-tahun sebelumnya dinamakan **persamaan rekursif**.

Akan dicari formula/fungsi untuk x_{n+1} yang tidak bergantung pada nilai x_n di periode sebelumnya. Formula ini dinamakan **Solusi persamaan rekursif**.

Definisi

Persamaan Beda Linear Orde Dua *adalah persamaan rekursif berbentuk* $x_{n+1} = a x_n + b x_{n-1} + g(n)$, *dengan* a *dan* b *konstanta dan* $g(n)$ *fungsi dalam* n. *Jika* $g(n) = 0$ *persaman tersebut disebut* ***homogen***

Ilustrasi:

(a) $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ persamaan beda linear homogen

(b) $x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + 3e^n$ persamaan beda linear tak homogen

(c) $x_{n+1} = \sin(x_n) + 5\cos(x_{n-1})$ bukan persamaan beda linear

Solusi Persamaan Beda Linear Homogen

Teorema

*Diberikan persaman beda linear homogen $x_{n+1} = a\,x_n + b\,x_{n-1}$. Bentuk matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Bila matriks $\mathbf{A}$ mempunyai **dua nilai eigen yang berbeda** r_1 dan r_2, maka **solusi umum** dari persamaan beda linear homogen adalah $x_n = c_1\,r_1^n + c_2\,r_2^n$. Bila Konstanta c_1 dan c_2 telah ditentukan, disebut **solusi khusus/particular**.*

Contoh: Misalkan $x_{n+1} = -x_n + 2\,x_{n-1}$ dengan $x_0 = 3$ dan $x_1 = 0$. Tentukan solusi umum dan solusi khusus persamaan beda tersebut. ♠

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Nilai eigen matriks A, $r_1 = -2$ dan $r_2 = 1$.

Solusi umum : $x_n = c_1\,(-2)^n + c_2\,(1)^n = c_1\,(-2)^n + c_2$

Dari syarat $x_0 = 3$ dan $x_1 = 0$ diperoleh $c_1 = 1$ dan $c_2 = 2$

Solusi khusus $x_n = (-2)^n + 2$

Solusi Persamaan Beda Linear Tak Homogen

Teorema

Diberikan persaman beda tak homogen $x_{n+1} = a x_n + b x_{n-1} + K$, dengan K konstanta. Solusi umum persamaan tersebut adalah solusi umum persamaan homogen ditambah dengan ***sebuah*** *solusi tak homogen.*

Catatan: Teknik mencari solusi tak homogen, gunakan pemisalan $x_n = c$.

Contoh: Misalkan $x_{n+1} = 5x_n - 6x_{n-1} + 2$ dengan $x_0 = 1$ dan $x_1 = 2$. Tentukan solusi umum dan solusi khusus persamaan beda tersebut. ♠

Perilaku asimtotik / Pertumbuhan Jangka Panjang

Perilaku asimtotik bertujuan untuk mengamati perkembangan populasi bila jangak waktu pengamatan sangat panjang ($n \to \infty$).

Teorema

Misalkan $x_{n+1} = a\,x_n + b\,x_{n-1}$ *dengan a dan b positif, maka*

1. *Bila* $a + b < 1$ *maka* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. *Populasi berkurang secara eksponensial.*
2. *Bila* $a + b = 1$ *maka* $\lim_{n\to\infty} x_n = c_1$, $c_1 > 0$. *Populasi konstan.*
3. *Bila* $a + b > 1$ *maka* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. *Populasi naik secara eksponensial.*

Bukti teorema di atas dapat dilihat pada Buku *Bittinger*, Calculus for The life Sciences, 2006, page 494, exercise 49-52.

Persamaan Diferensial

Warsoma Djohan

Prodi Matematika, FMIPA - ITB

January 21, 2016

Persamaan Diferensial (PD) adalah persamaan yang melibatkan turunan-turunan sebuah fungsi. Turunan tertinggi yang muncul pada persamaan tersebut disebut **orde** persamaan diferensial.

Contoh-contoh: (a) $\underbrace{y' = 2x + 3y}_{\text{orde 1}}$ (b) $\underbrace{y' = e^{x+y}}_{\text{orde 1}}$ (c) $\underbrace{x^2 y'' + xy = (y')^3}_{\text{orde 2}}$

Fungsi $y = f(x)$ disebut **Solusi** bila fungsi tersebut "memenuhi" hubungan persamaan diferensial.

Latihan:

1. Tunjukkan fungsi $y = 4e^x + 5e^{3x}$ solusi dari $y'' + 3y = 4y'$
2. Carilah solusi dari persamaan diferensial $y' = \frac{x}{2}$.

Solusi persamaan diferensial yang masih memuat konstanta disebut **solusi umum**, sedangkan bila konstantanya telah ditentukan, disebut **solusi khusus**.

Latihan: Carilah solusi dari persamaan diferensial $y' = \frac{x}{2}$, $y(2) = 3$.

Masalah Nilai Awal

Masalah nilai awal (MNA) adalah sebuah persamaan diferensial yang dilengkapi dengan syarat tertentu.

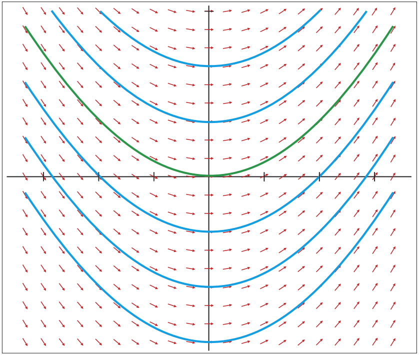
Syarat ini umumnya berupa nilai fungsi atau nilai turunannya di titik tertentu dan disebut **kondisi awal**.

Contoh-contoh:

a. Tentukan solusi MNA $y' = e^x + 5x - \sqrt{x},\ y(0) = 8$
b. Tentukan solusi MNA $y'' = x^2 - x,\ y(1) = 0$, dan $y'(1) = -1$

Medan Arah (Direction Field)

Pencarian solusi persamaan diferensial secara umum sukar ditentukan. Alternatif lain adalah dengan menggambarkan medan arah dari PD tersebut.



Perhatikan persaman diferensial $y' = \frac{x}{2}$.

x	y'
0	0
1	$\frac{1}{2}$
-1	$\frac{1}{2}$

x	y'
2	1
-2	-1
3	1,5
-3	-1.5

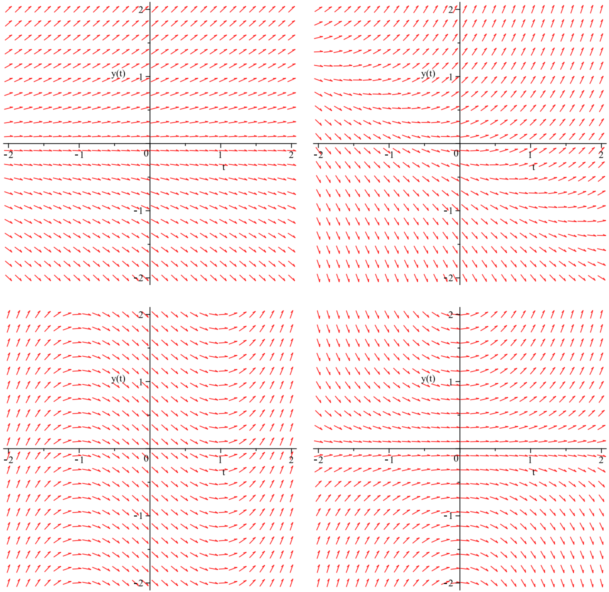
Medan arah menunjukkan potongan garis singgung di titik tersebut.

Kurva solusi digambar dengan mengikuti pola medan arah.

Ada tak hingga banyaknya kurva solusi tersebut. (jelaskan!)

Solusi dari MNA adalah kurva yang memenuhi kondisi awal.

Cocokkan gambar-gambar berikut dengan persamaan diferensialnya



(a) $y' = x^2 - 1$

(b) $y' = xy$

(c) $y' = y/2$

(d) $y' = 2x/3 + y$

PD Linear Orde Satu

Bentuk umum: $y' + p(x)y = q(x)$

Bila $q(x) = 0$, disebut **PD homogen**, bila $q(x) \neq 0$, disebut **PD tak homogen**.

Ilustrasi

- $(x^2+1)y' - xy = e^x \Longleftrightarrow y' \underbrace{- \frac{x}{x^2+1}}_{p(x)} y = \underbrace{\frac{e^x}{x^2+1}}_{q(x)}$, PD homogen.
- $y' + xy^2 = e^x$ bukan PD linear

Teorema

Diberikan masalah nilai awal $y' + p(x)y = q(x),\ y(x_0) = y_0$. Jika $p(x)$ dan $q(x)$ kontinu pada interval I yang memuat x_0 maka masalah nilai awal tersebut mempunyai solusi yang tunggal pada I.

Ilustrasi: Tentukan interval supaya MNA berikut mempunyai solusi yang tunggal. a. $y' - \frac{x}{x^2+1}y = \frac{e^x}{x^2+1},\ y(0) = 4$ b. $xy' + y = x^3,\ y(2) = -3$

(solusi lihat buku *Bittinger* pasal 8.2 halaman 552-553)

Solusi Umum PD Linear Orde Satu

Perhatikan PD linear orde satu $y' + p(x)y = q(x)$

Tetapkan **faktor pengintegral**: $e^{\int p(x)\,dx}$

Solusi Umum PD Linear Orde Satu

Perhatikan PD linear orde satu $y' + p(x)y = q(x)$

- Tetapkan **faktor pengintegral**: $e^{\int p(x)\,dx}$
- Kalikan kedua ruas dari PD dengan faktor pengintegral tersebut
- $e^{\int p(x)\,dx} y' + e^{\int p(x)\,dx} p(x)y = e^{\int p(x)\,dx} q(x)$
- $\dfrac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)\,dx} y\right] = e^{\int p(x)\,dx} q(x)$
- $e^{\int p(x)\,dx} y = \displaystyle\int \left[e^{\int p(x)\,dx} q(x)\right] dx$
- Solusi umum : $y = e^{-\int p(x)\,dx} \cdot \displaystyle\int \left[e^{\int p(x)\,dx} q(x)\right] dx$

Latihan: 1. Tentukan solusi umum dari $y' - 3x^2 y = x^2$.

2. Tentukan solusi $xy' + 2y = 5x^3,\ y(1) = \frac{5}{4}$.

3. Seekor kerang dimasukkan dalam air yang tercemar oleh *polychlorinated biphenyls (PCBs)*. Setiap hari, kerang tersebut mampu menyerap 12 micrograms PCB. Di dalam tubuh kerang, PCB tersebur diurai. Banyaknya PCB yang diuraikan dalam tubuh kerang $0,18Q$ microgram per hari, dengan Q(t) adalah banyaknya PCB dalam tubuh kerang setelah t hari. Bila pada saat awal kerang tersebut belum mengandung PCB,
   a. Tentukan banyaknya PCB dalam tubuh kerang setiap saat.
   b. Tentukan banyaknya PCB dalam kerang untuk $t \to \infty$.

4. Sebuah tangki berisi 100 liter larutan garam dengan konsentrasi 2,5 gram/liter. Air garam dengan konsentrasi 2 gram/liter memasuki tangki dengan laju 5 liter/menit. Pada saat yang sama larutan garam dalam tangki keluar dengan laju 5 liter/menit. Larutan diasumsikan selalu homogen. Misalkan $s(t)$ menyatakan jumlah garam dalam tangki setiap saat.
   a. Tuliskan MNA untuk masalah di atas.
   b. Tentukan jumlah garam dalam tangki setiap saat.
   c. Tentukan jumlah garam dalam tangki untuk $t \to \infty$.

Bagaimana situasinya bila laju air yang keluar hanya 4 liter/menit

Persamaan Diferensial Otonom dan Kestabilan

Perhatikan kembali bentuk umum PD orde satu: $y' = f(x, y)$

PD orde 1 disebut **otonom** bila ruas kanan hanya bergantung pada variabel **y**.

Ilustrasi: (a) $y' = x - y^2$ bukan PD otonom. (b) $y' = 6y^2 - y^3$ PD otonom

Dalam situasi normal, laju pertumbuhan suatu populasi pada umumnya hanya bergantung pada jumlah populasi saat itu, dan tidak bergantung pada waktu. Dengan demikian, model pertumbuhannya berbentuk sebuah PD otonom. Misalkan y menyatakan jumlah populasi dan x menyatakan waktu. Secara matematika modelnya dapat dituliskan sebagai $\frac{dy}{dx} = y' = f(y)$

Contoh: (*Model pertumbuhan ekponensial*) Laju pertumbuhan suatu populasi sebanding dengan jumlah populasi saat itu: $y' = ky$.

Solusinya $y = y_0\, e^{kx}$. Solusi ini menyatakan jumlah populasi setiap saat dengan y_0 adalah jumlah populasi pada saat awal.

Definisi

Nilai kesetimbangan *(equilibrium value) dari sebuah PD otonom* $y' = f(y)$ *adalah solusi yang berupa konstanta, yaitu* $y = c$.

Pada nilai kesetimbangan $y = c$, jumlah populasi selalu konstan karena $y' = 0$.

Nilai kesetimbangan merupakan solusi dari persamaan $f(y) = 0$, mengapa?.

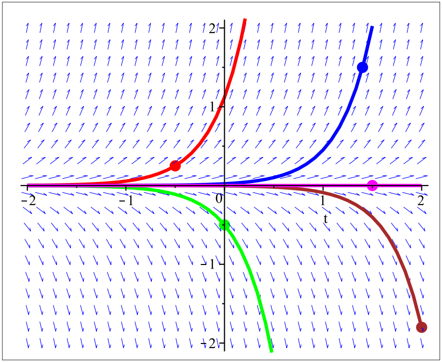
Contoh:Tentukan nilai kesetimbangan $y' = ky$.

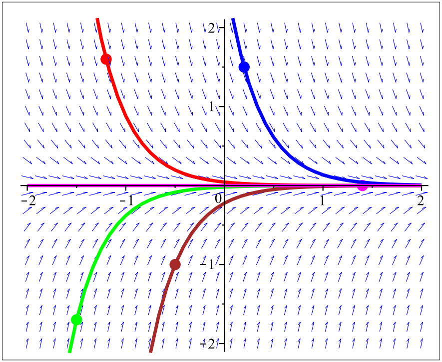
Pada soal ini $f(y) = ky$

Nilai kesetimbangan diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $f(y) = 0$

$ky = 0 \Longleftrightarrow y = 0$

Karakteristik perkembangan populasi dengan berbagai kondisi awal dari model ini dapat digambarkan secara kualitatif melalui diagram berikut:





Perilaku solusi dari $y' = ky$ untuk $k > 0$ dengan berbagai kondisi awal.

Untuk $x \to \infty$ semua solusi tak nol bersifat menjauhi nilai kesetimbangan.

Nilai kesetimbangan $y = 0$ ini disebut **tak stabil**

Perilaku solusi dari $y' = ky$ untuk $k < 0$ dengan berbagai kondisi awal

Untuk $x \to \infty$ semua solusi tak nol bersifat asimtotik ke nilai kesetimbangan.

Nilai kesetimbangan $y = 0$ ini disebut **stabil asimtotik**

Definisi

Misalkan $y = c$ adalah nilai kesetimbangan dari PD $y' = f(y)$. Misalkan y solusi PD tersebut dengan syarat awal $y(0) = y_0$ dengan $y_0 \neq c$ tetapi "dekat" dengan c.

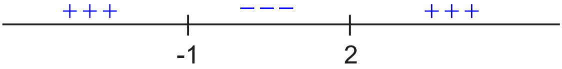
- *Jika untuk $x \to \infty$ solusi y divergen dari c maka dikatakan titik keseimbangan c* ***tak stabil***
- *Jika untuk $x \to \infty$ solusi y konvergen ke c maka dikatakan titik keseimbangan c* ***stabil asimptotik***
- *Bila salah satu dari pernyataan berikut dipenuhi, maka nilai kesetimbangan c disebut* ***semistabil***
  - *Solusi yang berada di atas $y = c$ konvergen ke $y = c$, sedangkan solusi yang berada di bawah $y = c$ divergen dari $y = c$.*
  - *Solusi yang berada di atas $y = c$ divergen dari ke $y = c$, sedangkan solusi yang berada di bawah $y = c$ konvergen ke $y = c$.*

Pengujian Kestabilan Dengan Pemeriksaan Tanda dari y'

Tentukan nilai kesetimbangan dan jenis kestabilan dari PD $y' = y^2 - y - 2$.

Mencari nilai kesetimbangan:$y^2 - y - 2 = 0 \iff (y-2)(y+1) = 0$

Nilai kesetimbangannya: $y = -1$ dan $y = 2$

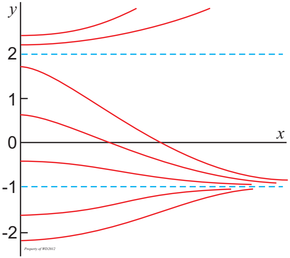


tanda $y' = (y-2)(y+1)$

Selanjutnya, kita periksa kestabilan nilai kesetimbangannya sebagai berikut:

"Tabel bentuk" dari PD $y' = y^2 - y - 2$

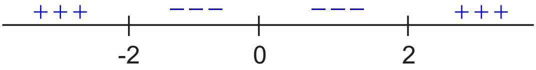
Interval	Tanda y'	Hasil	Kesimpulan
$(2,\infty)$	+	$\nearrow$	
$(-1,2)$	-	$\searrow$	$y = 2$ tak stabil
$(-\infty,-1)$	+	$\nearrow$	$y = -1$ stabil asimptotik



Tentukan nilai kesetimbangan & jenis kestabilan dari PD $y' = y^4 - 4y^2$.

Mencari nilai kesetimbangan: $y^4 - 4y^2 = 0 \iff y^2(y-2)(y+2) = 0$

Nilai kesetimbangannya: $y = -2$, $y = 0$, dan $y = 2$

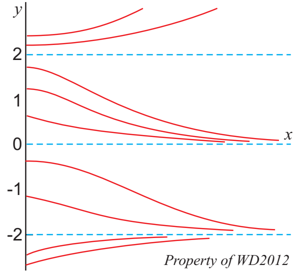


tanda $y' = y^2(y-2)(y+2)$

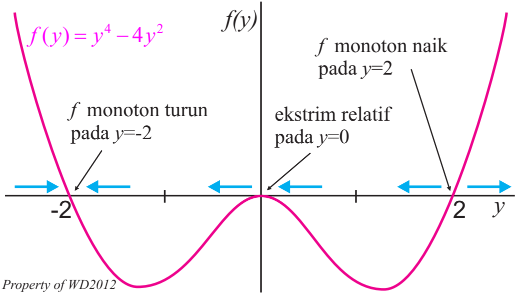
Selanjutnya, kita periksa kestabilan nilai kesetimbangannya sebagai berikut:

Tabel bentuk dari PD $y' = y^4 - 4y^2$

Interval	Tanda y'	Hasil	Kesimpulan
$(2, \infty)$	+	$\nearrow$	
$(0, 2)$	-	$\searrow$	$y = 2$ tak stabil
$(-2, 0)$	-	$\searrow$	$y = 0$ semistabil
$(-\infty, -2)$	+	$\nearrow$	$y = -2$ stabil asimptotik



Pengujian Jenis Kestabilan memakai $f'(y)$



Perhatikan kembali PD otonom $y' = f(y) = y^4 - 4y^2$.

Gambarkan grafik dari $f(y)$.

Perhatikan nilai-nilai kesetimbangannya.

Kita amati perilaku solusi y disekitar nilai-nilai kesetimbangan tersebut.

Gambarkan anak panah ke kanan bila solusinya membesar ($f(y) > 0$)

Gambarkan anak panah ke kiri bila solusinya mengecil ($f(y) < 0$)

Dari ilustrasi di atas diperoleh kesimpulan:

$y = -2$ stabil asimptotik, $y = 0$ semistabil, dan $y = 2$ tak stabil.

Berikut ini disajikan teorena pengujian kestabilan memakai tanda dari $f'(y)$.

Teorema

Misalkan $y = c$ merupakan nilai kesetimbangan dari PD otonom $y' = f(y)$, dengan $f(y)$ dapat diturunkan.

- *Jika $f'(c) < 0$ maka $y = c$ stabil asimptotik.*
- *Jika $f'(c) > 0$ maka $y = c$ tak stabil.*
- *Jika $f'(c) = 0$ dan c titik ekstrim lokal dari f, maka $y = c$ semistabil.*

Contoh: Periksa kestabilan nilai keseimbangan dari PD $y' = y^4 - 4y^2$

Nilai kesetimbangan dari PD tersebut adalah: $y = -2$, $y = 0$, dan $y = 2$.

Pada soal ini, $f(y) = y^4 - 4y^2$. $f'(y) = 4y^3 - 8y$.

$f'(-2) = 4(-2)^3 - 8(-2) < 0$. Jadi $y = -2$ stabil asimptotik.

$f'(2) = 4(2)^3 - 8(2) > 0$. Jadi $y = 2$ tak stabil.

$\begin{cases} f'(0) = 4(-2)^3 - 8(-2) = 0. \\ y = 0 \text{ merupakan titik maksimum lokal} \end{cases}$ Jadi $y = 0$ semistabil.

Uji kecekungan dan titik belok dengan $f'(y)$

Perhatikan sebuah PD otonom $y' = f(y)$.

Untuk memeriksa kecekungan dan titik belok digunakan uji turunan kedua.

$$y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(f(y))}{dx} = \frac{d(f(y))}{dy}\frac{dy}{dx} = f'(y)f(y).$$

Perhatikan bahwa:

- Titik belok adalah titik di mana kecekungan grafik berubah.
- Nilai kesetimbangan bukan merupakan titik belok. Jadi $f(y) \neq 0$ (*)

Asumsikan bahwa $y''(x)$ ada, maka calon titik belok adalah solusi dari persamaan $y''(x) = 0 \Longleftrightarrow f'(y)f(y) = 0$. (**)

Dari (*) dan (**) disimpulkan: Calon titik belok adalah solusi dari $f'(y) = 0$.

Selanjutnya kita harus memeriksa tanda $f'(y)f(y)$ di kiri dan kanan dari calon titik belok tersebut. Bila ada perubahan tanda maka titik tersebut merupakan titik belok.

Tentukan daerah kecekungan dan titik belok dari $y' = f(y) = y^4 - 4y^2$

Mencari nilai kesetimbangan: $y^4 - 4y^2 = 0 \Longleftrightarrow y^2(y-2)(y+2) = 0$.

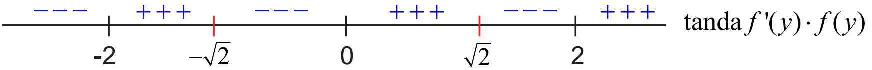
Nilai kesetimbangan: $y = -2$, $y = 0$, dan $y = 2$.

Mencari calon titik belok: $f'(y) = 0 \Longleftrightarrow 4y^3 - 8y = 0 \Longleftrightarrow 4y(y^2 - 2) = 0$

Calon titik belok: $y = 0$ (tidak dipakai), $y = -\sqrt{2}$, dan $y = \sqrt{2}$.

Selanjutnya kita periksa tanda $f'(y)f(y)$ di sekitar $y = -\sqrt{2}$, dan $y = \sqrt{2}$.

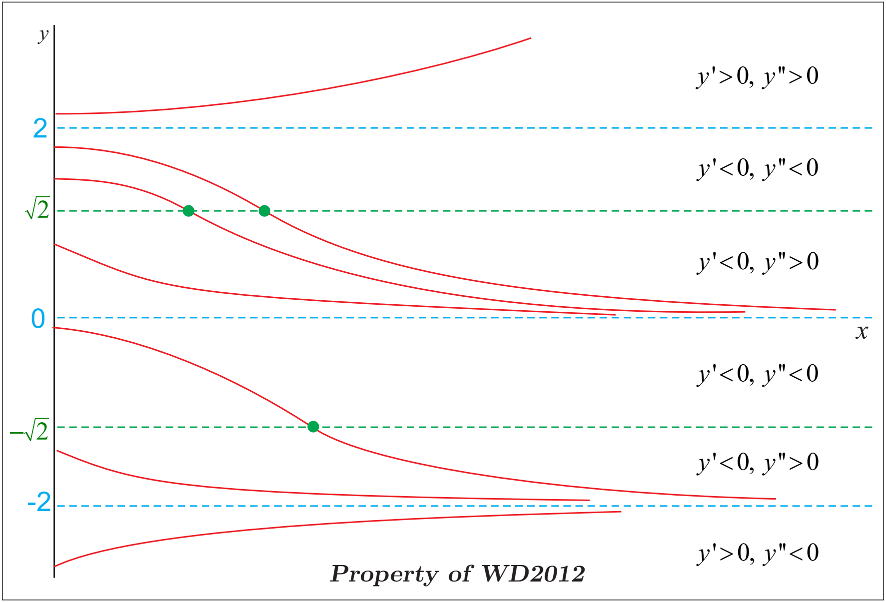
$$f'(y)f(y) = 4y^3(y - \sqrt{2})(y + \sqrt{2})(y-2)(y+2)$$



Jadi titik beloknya: $y = -\sqrt{2}$ dan $y = \sqrt{2}$.

Gambar kurva-kurva solusinya dapat dilihat pada halaman berikutnya.

Kurva-kurva solusi PD Otonom $y^4 - 4y^2 = 0$



Fat Crystalization. Misalkan $y(t)$ menyatakan proporsi lemak susu yang dapat dikristalkan setelah disimpan t jam. Penelitian menunjukkan y memenuhi persamaan $y' = f(y) = 8(y^5 - y)$. Gambarkan kurva-kurva solusi dari y.

Mencari nilai kesetimbangan: $8(y^5 - y) = 0 \Longleftrightarrow 8y(y-1)(y+1)(y^2+1) = 0$.

Nilai kesetimbangan: $y = -1$, $y = 0$, dan $y = 1$.

Memeriksa kemonotonan solusi dan kestabilan nilai-nilai kesetimbangan.

$- - -$ | $+ + +$ | $- - -$ | $+ + +$

-1 0 1

tanda $y' = 8y(y-1)(y+1)(y^2+1)$

Tabel bentuk dari PD $y' = 8(y^5 - y)$

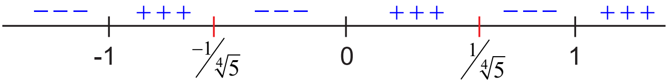
Interval	Tanda y'	Hasil	Kesimpulan
$(1,\infty)$	+	$\nearrow$	
$(0,1)$	-	$\searrow$	$y = 1$ tak stabil
$(-1,0)$	+	$\nearrow$	$y = 0$ stabil asimptotik
$(-\infty,-1)$	-	$\searrow$	$y = -2$ tak stabil

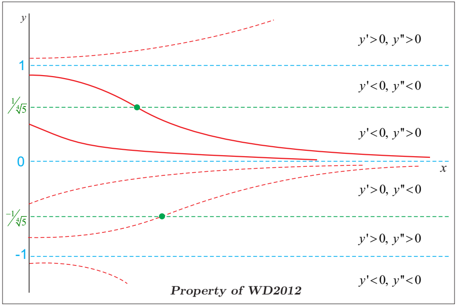
Periksa kecekungan dan titik belok dari kurva solusi.

$$f'(y) = 8(5y^4 - 1) = 40(y^4 - \tfrac{1}{5}) = 40\left(y^2 + \tfrac{1}{\sqrt[2]{5}}\right)\left(y + \tfrac{1}{\sqrt[4]{5}}\right)\left(y - \tfrac{1}{\sqrt[4]{5}}\right)$$

Calon titik belok: $y = -\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ dan $y = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$

$$y''(x) = f'(y)f(y) = 320y\left(y^2 + \tfrac{1}{\sqrt[2]{5}}\right)\left(y + \tfrac{1}{\sqrt[4]{5}}\right)\left(y - \tfrac{1}{\sqrt[4]{5}}\right)(y-1)(y+1)(y^2+1)$$





Interpretasi fisis dari kurva solusi.

- Garis putus-putus tidak mungkin jadi solusi.
- Jika susu tersebut murni, jadi seluruhnya dapat dikristalkan ($y(0) = 1$), maka bila dibiarkan, bagian yang dapat dikristalkan (y) selalu satu.
- Bila susu tersebut sedikit tercemar, sehingga $y(0) < 1$, maka bila dibiarkan dalam jangka waktu yang panjang, proporsi yang dapat dikristalkan akan makin sedikit, bahkan menuju nol.

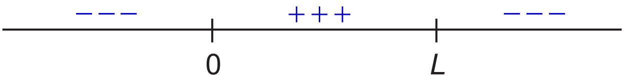
Model Pertumbuhan Logistik:

$y' = f(y) = ky\left(1 - \frac{y}{L}\right)$, k dan L konstanta positif.

Mencari nilai kesetimbangan: $ky\left(1 - \frac{y}{L}\right) = 0 \iff ky\frac{L-y}{L} = 0.$

Nilai kesetimbangan: $y = 0$ dan $y = L$.

Memeriksa kemonotonan solusi dan kestabilan nilai-nilai kesetimbangan.



tanda $y' = k\,y\,\frac{L-y}{L}$

Tabel bentuk dari Model Pertumbuhan Logistik

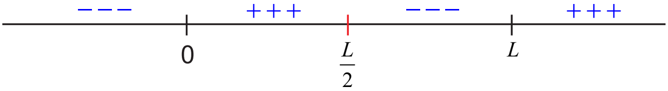
Interval	Tanda y'	Hasil	Kesimpulan
(L, ∞)	-	$\searrow$	
$(0, L)$	+	$\nearrow$	$y = L$ stabil asimptotik
$(-\infty, 0)$	-	$\searrow$	$y = 0$ tak stabil

Periksa kecekungan dan titik belok dari kurva solusi.

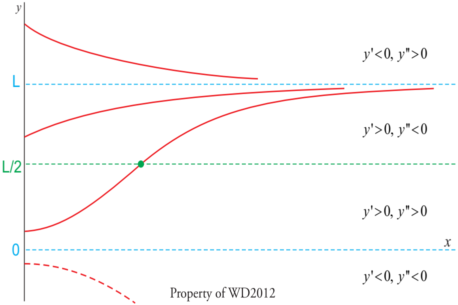
$f'(y) = k\frac{L-2y}{L}$

Calon titik belok: $f'(y) = 0 \Longleftrightarrow k\frac{L-2y}{L} = 0 \Longleftrightarrow y = \frac{L}{2}$

$y''(x) = f'(y)f(y) = k^2 y \frac{L-2y}{L}\frac{L-y}{L}$



tanda $f'(y) \cdot f(y)$



Interpretasi fisis dari kurva solusi.

- Garis putus-putus tidak mungkin jadi solusi.
- Jika jumlah populasi saat awal lebih kecil dari L, tapi positif, maka jumlah populasi cenderung bertambah dan asimptot terhadap garis $y = L$
- Jika jumlah populasi saat awal lebih besar dari L maka populasi akan berkurang dan asimptot terhadap $y = L$

Logistic Growth Model with Threshold:

$$y' = f(y) = ky\left(1 - \frac{y}{L}\right)\left(\frac{y}{T} - 1\right),\ 0 < k \text{ dan } 0 < T < L.$$

Nilai kesetimbangannya: $y = 0$, $y = T$, dan $y = L$.

Berikut disajikan kurva-kurva solusinya. ♠