KALKULUS VISUAL BAGIAN II

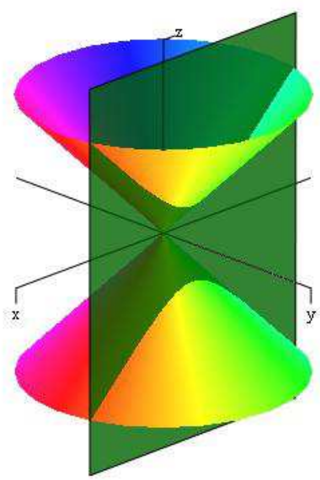
DIKTAT PENDUKUNG KULIAH

MA1201 MATEMATIKA 2A

Penyusun:

Drs. Warsoma Djohan M.Si.

Warsoma Djohan



Irisan Kerucut, property of WD2011

Program Studi Matematika, Fakultas MIPA

Institut Teknologi Bandung

Januari 2015

Kata Pengantar

Matematika merupakan matakuliah wajib tingkat pertama bagi hampir semua Program Studi dan Sekolah di Institut Teknologi Bandung. Berdasarkan kebutuhan yang berbeda pada berbagai Program Studi yang ada, mulai tahun ajaran 2004 perkuliahan Matematika dibagi menjadi dua macam yaitu **Matematika A** (4 kredit) dan **Matematika B** (3 kredit). Perlu diperhatikan, materi Matematika 2B bukan merupakan subset dari materi Matematika 2A. Untuk itu, penulis mengembangakn diktat untuk masing-masing Matematika 2A dan 2B secara terpisah.

Diktat ini mulai disusun sejak tahun 2004. Pada awalnya materi disusun dalam bentuk beningan/transparency. Tujuannya adalah untuk meningkatkan proses pembelajaran, dengan cara menyediakan bahan kuliah yang berisi ringkasan teori dan soal-soal latihan terpilih. Dengan adanya beningan ini diharapkan proses pencatatan yang banyak dilakukan pada perkuliahan konvensional bisa dikurangi. Dengan demikian, waktu yang tersedia dapat digunakan dengan lebih efektif untuk kegiatan ceramah dan diskusi.

Diktat ini selalu direvisi secara kontinu dan disesuaikan dengan kebutuhan yang ada. Perkembangan peralatan multimedia saat ini memungkinkan konstruksi tampilan konsep-konsep matematika secara visual melalui bantuan komputer. Hal ini akan sangat membantu proses belajar mahasiswa, karena konsep-konsep yang rumit dan abstrak dapat diperlihatkan secara kongkrit melalui program animasi. Sejalan dengan perubahan ini, mulai tahun ajaran 2011 judul diktat ini diubah menjadi "Kalkulus Visual". Melalui mekanisme ini diharapkan para mahasiswa dapat memahami konsep-konsep yang ada dengan lebih cepat dan lebih mudah. Pada diktat ini, bagian yang memuat animasi ditandai dengan ikon berbentuk ♠ atau *Animation*. Cara menampilkan animasinya adalah dengan meng-klik tombol *mouse* pada ikon tersebut.

Untuk dapat memanfaatkan diktat ini secara efektif diperlukan beberapa perangkat lunak pendukung, yaitu: Adobe Acrobat Reader versi 9 atau lebih baru dan Quick Time player. Semua perangkat lunak tersebut bersifat *public domain/free* dan dapat diunduh/didownload via internet. Untuk memudahkan, penulis telah menempatkan diktat kuliah beserta perangkat lunak pendukung tersebut pada *ftp server* dengan alamat ***ftp://167.205.6.17*** atau ***ftp://ftp2.math.itb.ac.id***. Gunakan *username: anonymous, password: anonymous*. Diktat Matematika 2A dan Matematika 2B, masing-masing tersimpan di dalam folder ***BahanKuliah/Warsoma/2015 MA1201 Matematika 2A*** dan ***BahanKuliah/Warsoma/2015 MA1202 KMatematika 2B***, sedangkan perangkat pendukungnya berada dalam folder

BahanKuliah/Warsoma/Software Pendukung. Tatacara instalasi dan penggunaan diktat ini pada komputer anda dijelaskan pada file —**readme1st.doc**.

Catatan:

- Sesuai dengan kebijakan dari pihak pengelola internet di ITB, semua *ftp-server* di ITB hanya dapat diakses dari dalam kampus ITB.
- Akses dari luar kampus ITB masih dimungkinkan melalui fasilitas Virtual Private Network (VPN). Akses ini hanya dapat digunakan oleh mereka yang mempunyai *account* internet di ITB.
- Untuk dapat memastikan tampilan animasi yang ada berjalan dengan benar, semua file PDF yang ada harap dibuka menggunakan *Adobe Acrobat Reader*. Sejauh ini kelengkapan yang ada di *PDF reader* yang lain belum sepenuhnya mendukung fasilitas yang diperlukan oleh diktat ini.

Sebagai penutup, Penulis mengucapkan terima kasih kepada rekan-rekan Dosen yang telah memberikan masukan terhadap pengembangan diktat ini, diantaranya kepada Dr. Wono Setya Budhi, Prof. Dr. Hendra Gunawan, Prof. Dr. Edy Tri Baskoro, Dr. Sri Redjeki, serta Drs Koko Martono M.S.. Semoga diktat ini dapat berguna untuk meningkatkan kualitas pembelajaran Matematika khusunya bidang Kalkulus.

Januari 2015,

Penyusun,

Warsoma Djohan

Teknik Pengintegralan

Sejauh ini, kita telah membahas fungsi-fungsi elementer dengan cukup lengkap. Fungsi-fungsi tersebut terdiri dari fungsi aljabar, bentuk akar dan harga mutlak, fungsi eksponen, fungsi logaritma, fungsi trigonometri, fungsi invers trigonometri, fungsi hiperbol dengan inversnya, dan kombinasi antara fungsi-fungsi tersebut.

Proses untuk mencari turunan dari fungsi-fungsi tersebut 'relatif mudah' karena telah ada aturan yang lengkap untuk mengevaluasinya. Berlainan dengan menghitung turunan, proses sebaliknya, yaitu mencari anti turunan / integral dari sebuah fungsi merupakan proses yang jauh lebih sukar. Beberapa fungsi seperti $f(x) = e^{x^2}$ bahkan tidak memiliki anti turunan.

Pada pembahasan sebelumnya telah diperkenalkan teknik substitusi untuk mencari anti turunan. Teknik ini hanya dapat diterapkan pada sekelompok fungsi tertentu. Pada bagian ini akan dikembangkan beberapa teknik baru untuk menentukan anti turunan dari suatu fungsi.

Berikut ini disajikan rumus-rumus dasar anti turunan yang diperoleh langsung dari pembahasan konsep turunan pada bab-bab sebelumnya.

1. $\displaystyle\int k\,du = ku + c$
2. $\displaystyle\int u^r\,du = \begin{cases} \frac{u^{r+1}}{r+1} + c & r \neq 1 \\ \ln|u| + c & r = 1 \end{cases}$
3. $\displaystyle\int e^u\,du = e^u + c$
4. $\displaystyle\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + c \qquad a \neq 1,\ a > 0$
5. $\displaystyle\int \sin u\,du = -\cos u + c$
6. $\displaystyle\int \cos u\,du = \sin u + c$
7. $\displaystyle\int \sec^2 u\,du = \tan u + c$
8. $\displaystyle\int \csc^2 u\,du = -\cot u + c$
9. $\displaystyle\int \sec u\ \tan u\,du = \sec u + c$
10. $\displaystyle\int \csc u\ \cot u\,du = -\csc u + c$

11. $\displaystyle\int \tan u\, du = -\ln|\cos u| + c$ ♠

12. $\displaystyle\int \cot u\, du = \ln|\sin u| + c$

13. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$ ♠

14. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$

15. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{|u|}{a}\right) + c$

Pengintegralan dengan Metode Substitusi

Pada metode ini, sebagian suku dari integran (fungsi yang diintegralkan) disubstitusikan menjadi variabel baru. Substitusi ini diatur agar bentuk integral semula berubah menjadi salah satu dari 15 bentuk integral di atas. Selanjutnya setelah diperoleh hasil integralnya, kita kembalikan variabel baru tersebut ke variabel semula.

Contoh-Contoh:

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2(x^2)}\, dx$

2. $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{5-9x^2}}\, dx$

3. $\displaystyle\int \frac{6e^{1/x}}{x^2}\, dx$

4. $\displaystyle\int \frac{e^x}{4+9e^{2x}}\, dx$

5. $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^4+11}\, dx$

6. $\displaystyle\int \frac{a^{\tan x}}{\cos^2 x}\, dx$

7. $\displaystyle\int \frac{7}{x^2-6x+25}\, dx$

8. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x-2}\, dx$

9. $\displaystyle\int \sec x\, dx$

10. $\displaystyle\int \csc x\, dx$

Pengintegralan Fungsi Trigonometri

Pada pasal ini akan dibahas integral dari $\sin^n x$ dan $\cos^n x$, $n \geq 2$. Untuk mendapatkan metodenya secara umum, perhatikanlah ilustrasi berikut ini:

Tentukan (a.) $\displaystyle\int \sin^2 x\, dx$ ♠ (b.) $\displaystyle\int \sin^3 x\, dx$ ♠

Dari dua ilustrasi di atas, terlihat bahwa penyelesaian integral tersebut untuk pangkat genap dan ganjil caranya berbeda. Berikut ini disajikan prosedurnya secara umum:

Bentuk $\int \sin^n x\, dx$ dan $\int \cos^n x\, dx$ dengan n genap

Pangkat n direduksi melalui hubungan sebagai berikut:

- $\sin^n x = \left(\sin^2 x\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right)^{\frac{n}{2}}$
- $\cos^n x = \left(\cos^2 x\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\right)^{\frac{n}{2}}$

Bentuk $\int \sin^n x\, dx$ dan $\int \cos^n x\, dx$ dengan n ganjil

- $\displaystyle\int \sin^n x\, dx = \int \sin^{n-1} x \sin x\, dx = -\int \sin^{n-1} x\; d(\cos x)$

  lalu tuliskan $\sin^{n-1} x = \left(\sin^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}} = \left(1 - \cos^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}}$
- $\displaystyle\int \cos^n x\, dx = \int \cos^{n-1} x \cos x\, dx = \int \cos^{n-1} x\; d(\sin x)$

  lalu tuliskan $\cos^{n-1} x = \left(\cos^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}} = \left(1 - \sin^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}}$

Contoh: Tentukan integral-integral berikut

(a.) $\displaystyle\int \sin^4 x\, dx$ ♠ (b.) $\displaystyle\int \cos^5 x\, dx$ ● (c.) $\displaystyle\int \cos^6 x\, dx$ ●

Bentuk $\int \sin^m x \, \cos^n x \, dx$

- Bila m ganjil, lakukan substitusi seperti pada pengintegralan $\int \sin^m x \, dx$ dengan m ganjil, sedangkan faktor $\int \cos^n x \, dx$ tidak dubah.
- Bila n ganjil, lakukan substitusi seperti pada pengintegralan $\int \cos^n x \, dx$ dengan n ganjil, sedangkan faktor $\int \sin^m x \, dx$ tidak dubah.
- Bila m dan n keduanya genap, reduksilah kedua pangkat tersebut seperti pada pengintegralan $\int \sin^n x \, dx$ dan $\int \cos^m x \, dx$ untuk pangkat genap.

Contoh: Tentukan (a) $\int \sin^4 x \, \cos^3 x \, dx$ (b) $\int \sin^2 x \, \cos^4 x \, dx$

Bentuk $\int \tan^n x \, dx$ dan $\int \cot^n x \, dx$

Untuk $n = 1$ hasilnya sudah dicantumkan pada tabel di awal bab ini. Saat ini akan dibahas untuk $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq 2$. Secara umum, metode penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

- Tuliskan $\tan^n x = \tan^{n-2} x \tan^2 x = \tan^{n-2} x \left(\sec^2 x - 1\right)$
- Tuliskan $\cot^n x = \cot^{n-2} x \cot^2 x = \cot^{n-2} x \left(\csc^2 x - 1\right)$

Contoh: Tentukan (a.) $\int \tan^4 x \, dx$ (b.) $\int \cot^3 x \, dx$

Bentuk $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ dan $\int \cot^m x \csc^n x\,dx$, n genap

- Tuliskan $\tan^m x \sec^n x = \tan^m x \sec^{n-2} x \sec^2 x$ dan ubah $\sec^{n-2} x$ menjadi $\tan^{n-2} x$ lewat hubungan $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$.
- Tuliskan $\cot^m x \csc^n x = \cot^m x \csc^{n-2} x \csc^2 x$ dan ubah $\csc^{n-2} x$ menjadi $\cot^{n-2} x$ lewat hubungan $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$.

Contoh: Tentukan $\int \tan^{3/2} x \sec^4 x\,dx$ ♠

Bentuk $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ dan $\int \cot^m x \csc^n x\,dx$, m ganjil

- Tuliskan $\tan^m x \sec^n x = \tan^{m-1} x \sec^{n-1} x \sec x \tan x$
- Tuliskan $\cot^m x \csc^n x = \cot^{m-1} x \csc^{n-1} x \csc x \cot x$

Contoh: Tentukan (a.) $\int \tan^3 x \sec^{-1/2} x\,dx$ ♠

$$\int \sin(mx)\cos(nx)\,dx, \quad \int \sin(mx)\sin(nx)\,dx, \quad \int \cos(mx)\cos(nx)\,dx$$

Ketiga bentuk di atas diselesaikan dengan memanfaatkan identitas berikut:

- $\sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]$
- $\sin(mx)\sin(nx) = -\frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\right]$
- $\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]$

Contoh: Tentukan (a.) $\int \sin(2x)\cos(3x)\,dx$ ●

(b.) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx$ ♠

Substitusi yang Merasionalkan

Metode ini membahas integran yang memuat tanda akar. Sustitusi rasional adalah substitusi yang dilakukan dengan tujuan menghilangkan tanda akar tersebut. Pada pasal ini fungsi yang berada di bawah tanda akar dibatasi pada fungsi linear dan fungsi kuadrat.

Bentuk $\sqrt[n]{(ax+b)^m}$, gunakan substitusi $(ax+b) = u^n$

Contoh: (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ (b) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx$ (c) $\displaystyle\int x\sqrt[5]{(x+1)^2}\,dx$

Bentuk $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, dan $\sqrt{x^2-a^2}$

Pada ketiga bentuk tersebut, masing-masing gunakan substitusi:

- $x = a\,\sin t \qquad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
- $x = a\,\tan t \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$
- $x = a\,\sec t \qquad 0 \leq t \leq \pi, \quad t \neq \frac{\pi}{2}$

Dengan substitusi tersebut diperoleh:

- $\sqrt{a^2-x^2} = a\,\cos t$
- $\sqrt{a^2+x^2} = a\,\sec t$
- $\sqrt{x^2-a^2} = \begin{cases} a\,\tan t & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ -a\,\tan t & \frac{\pi}{2} < t \leq \pi \end{cases}$

Contoh: Tentukan integral-integral berikut

(a) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}\,dx$

Pengintegralan Parsial

Pengintegralan parsial merupakan sebuah teknik di mana fungsi yang akan diintegralkan berasal dari perkalian dua buah fungsi. Untuk memperoleh rumus integral parsial, perhatikanlah proses berikut. Misalkan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$ dua buah fungsi.

$$\frac{d(uv)}{dx} = u'v + uv'$$

$$d(uv) = u'v\,dx + uv'\,dx$$

$$uv = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx$$

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx \quad \text{atau} \quad \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Contoh: Tentukan integral-integral berikut

(a) $\int x\,\cos x\,dx$ (b) $\int_1^2 \ln x\,dx$ (c) $\int \sin^{-1} x\,dx$

(d) $\int x^2\,\sin x\,dx$ (e) $\int e^x\,\sin x\,dx$ (f) $\int \sec^3 x\,dx$

(g) $\int \tan^2 x\,\sec^3 x\,dx$

(h) Tunjukkan: $\displaystyle\int \sin^n x\,dx = \frac{-\sin^{n-1} x\,\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$

(i) $\int x\,\cos^2 x\,\sin x\,dx$ (j) $\int x\,\sin^3 x\,dx$ (tulis $\sin^3 x = (1-\cos^2 x)\,\sin x$)

Pengintegralan Fungsi Rasional

Pada pasal ini akan dibahas integral berbentuk

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \quad \text{dengan } P(x), Q(x) \text{ polinom.}$$

Contoh: Tentukan $\displaystyle\int \frac{x^5 + 2x^3 - x + 1}{x^3 + 5x}\,dx$

Sebelum kita lakukan proses integrasi, hal pertama yang harus diperhatikan adalah derajat dari pembilang dan penyebut. Bila derajat pembilang 'lebih besar atau sama dengan' derajat penyebut, lakukan dahulu proses pembagian polinom. Untuk contoh di atas, bila dilakukan pembagian polinom maka diperoleh:

$$\frac{x^5 + 2x^3 - x + 1}{x^3 + 5x} = x^2 - 3 + \frac{14x + 1}{x^3 + 5x}$$

Jadi, $\displaystyle\int \frac{x^5 + 2x^3 - x + 1}{x^3 + 5x}\,dx = \int (x^2 - 3)\,dx + \int \frac{14x + 1}{x^3 + 5x}\,dx$

Suku pertama pada ruas kanan mudah untuk diintegralkan karena berupa polinom. Permasalahan tinggal pada suku kedua yang berupa fungsi rasional. Dengan demikian, untuk selanjutnya pembahasan cukup kita batasi pada masalah integral fungsi rasional dengan derajat pembilang lebih kecil dari derajat penyebut.

Pada beberapa soal, integral fungsi rasional dapat diselesaikan dengan substitusi sederhana. Misalnya $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 5x}{2x^3 - 5x^2 + 6}\,dx$ dapat kita selesaikan dengan mudah memakai substitusi $u = 2x^3 - 5x^2 + 6$.

Untuk selanjutnya kita akan membahas integral fungsi rasional secara bertahap serta teknik-teknik penyelesaiannya.

Bentuk 1: Pembilang konstanta, penyebut terdiri dari satu faktor linear dengan multiplisitas $m \geq 1$.

$$\int \frac{1}{(ax+b)^m}\,dx \qquad \text{gunakan substitusi } u = ax + b$$

Contoh: (a) $\displaystyle\int \frac{2}{(2x+1)^3}\,dx$ ♠ (b) $\displaystyle\int \frac{2}{3x+5}\,dx$ •

Bentuk 2: Pembilang polinom derajat $\geq$ 1, penyebut terdiri dari satu faktor linear dengan multiplisitas m. Integran tersebut kita uraikan atas suku-suku sebagai berikut:

$$\frac{p(x)}{(ax+b)^m} = \frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(ax+b)^m}$$

Perhatikan bahwa setiap suku pada ruas kanan merupakan bentuk 1.

Contoh: $\displaystyle\int \frac{x-3}{(x-1)^2}\,dx$ ♠

Bentuk 3: Penyebut terdiri dari beberapa faktor linear dengan multiplisitas satu. Pada bentuk ini Kita lakukan penguraian sebagai berikut,

$$\frac{S(x)}{(x-x_1)\,(x-x_2)\,\cdots\,(x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-x_2}$$

Setiap suku pada ruas kanan merupakan bentuk 1.

Contoh: (a) $\displaystyle\int \frac{7}{(2x-1)(x+3)}\,dx$ ♠ (b) $\displaystyle\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}\,dx$ •

Bentuk 4: Penyebut terdiri dari faktor-faktor linear dengan multiplisitas boleh lebih dari satu. Masing-masing faktor kita uraikan mengikuti aturan pada bentuk 2 dan bentuk 3. Hasilnya adalah integran dengan suku-suku seperti bentuk 1.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-11x+15}{(x-2)^2\,(x+1)} &= \frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x+1} \\
\frac{x^2-11x+15}{(x-2)^2\,(x+1)} &= \frac{A(x-2)(x+1)+B(x+1)+C(x-2)^2}{(x-2)^2(x+1)} \\
x^2-11x+15 &= A(x-2)(x+1)+B(x+1)+C(x-2)^2
\end{aligned}$$

Substitusikan secara beruntun nilai-nilai $x=2$, $x=-1$ dan $x=0$ pada persamaan di atas, maka diperoleh $B=-1$, $C=3$ dan $A=-2$. Jadi

$$\frac{x^2-11x+15}{(x-2)^2\,(x+1)}=\frac{-2}{x-2}+\frac{-1}{(x-2)^2}+\frac{3}{x+1}$$

Contoh: (a) $\int \frac{8x^2+5x-8}{(2x-1)^2(x+3)}\,dx$ ♠ (b) $\int \frac{3x^5+17x^4+9x^3-64x^2-30x+1}{(x-1)^2(x-2)(x+3)^3}\,dx$ •

Bentuk 5: Pembilang konstanta dan penyebut polinom kuadrat definit dengan multiplisitas 1. Penyebut kita susun agar terbentuk suku dengan kuadrat sempurna. Hasil integralnya merupakan fungsi invers tangen (lihat item nomor 14 pada awal bab ini).

Contoh: $\int \frac{1}{x^2+4x+8}\,dx.$ ♠

Bentuk 6: Pembilang polinom derajat satu dan penyebut polinom kuadrat definit dengan multiplisitas 1. Lakukan pengubahan sebagai berikut,

$$\frac{px+q}{x^2+bx+c} = \frac{\frac{p}{2}(2x+b)}{x^2+bx+c} + \frac{q-\frac{p}{2}b}{x^2+bx+c}$$

Suku pertama pada ruas kanan diselesaikan dengan substitusi $u = x^2 + bx + c$ sedangkan suku kedua diselesaikan seperti pada bentuk 5.

Contoh: $\displaystyle\int \frac{3x+10}{x^2+4x+8}\,dx$ ♠

Bentuk 7: Penyebut terdiri dari beberapa faktor dan memuat faktor kuadrat definit bermultiplisitas 1. Setiap faktor pada penyebut diuraikan masing-masing seperti pada bentuk-bentuk sebelumnya.

$$\frac{S(x)}{(x-t)(x^2+bx+c)} = \frac{A}{x-t} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$$

Contoh: $\displaystyle\int \frac{7x^2+2x-7}{(4x+1)(x^2+4x+8)}\,dx$ ♠

Bentuk 8: Penyebut memuat faktor kuadrat definit bermultiplisitas 2. Integran kita uraikan sebagai berikut,

$$\frac{S(x)}{(x-t)(x^2+bx+c)^2} = \frac{A_1}{x-t} + \frac{A_2x+A_3}{x^2+bx+c} + \frac{A_2x+A_3}{(x^2+bx+c)^2}$$

Contoh: $\displaystyle\int \frac{16x^4+11x^3+46x^2+17x+6}{(4x+1)(x^2+1)^2}\,dx$ ♠

Bentuk Tak tentu Limit

Perhatikan tiga buah limit berikut:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-x-6}$ (c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Bila masing-masing titik limitnya disubstitusikan, semuanya menghasilkan bentuk $\frac{0}{0}$. Namun demikian, bila dihitung, nilai limit dari ketiga contoh tersebut berbeda-beda. Bentuk seperti ini dinamakan bentuk tak tentu.

Pada beberapa bab sebelumnya kita telah mempelajari berbagai metode yang dapat diterapkan untuk menghitung bentuk tak tentu di atas. Pada pasal ini, akan disajikan metode lain yang relatif mudah untuk mengevaluasi limit tersebut.

Aturan L'Hopital 1: Misalkan $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

Bila $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ada (boleh tak hingga) maka $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Contoh: Tentukan limit-limit berikut:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2+3x-10}{x^2-4x+4}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{\ln(1+x)}$ (e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2+3x}$

(h) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^{-x}}{x^{-1}}$

Aturan L'Hopital 2: Misalkan $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \lim\limits_{x\to a} |g(x)| = \infty$.

Bila $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ada (boleh takhingga) maka $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Contoh: Tentukan limit-limit berikut:

(a) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x}{e^x}$ (b) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^a}{e^x}$, $a>0$

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x^a}$ $a>0$ (d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x}$

Bentuk Tak Tentu $0 \cdot \infty$.

Bentuk ini diubah jadi bentuk $\frac{0}{\frac{1}{\infty}}$ atau $\frac{\infty}{\frac{1}{0}}$

Contoh: Tentukan $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x \cdot \ln(\sin x)$. ♠

Bentuk Tak Tentu $\infty - \infty$.

Bentuk ini umumnya merupakan fungsi pecahan dikurangi fungsi pecahan lain. Untuk menyelesaikannya, kita samakan penyebutnya. Selanjutnya akan diperoleh bentuk $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$

Contoh: Tentukan $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$. ♠

Bentuk Tak Tentu 0^0, ∞^0, dan 1^∞.

Lakukan penarikan logaritma.

Contoh: Tentukan limit-limit berikut

(a) $\lim_{x \to 0^+} x^x$ ♠ (b) $\lim_{x \to 0^+} (x+1)^{\cot x}$ ● (c) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x}$ ●

Catatan: Bentuk-bentuk berikut merupakan bentuk tentu

$\frac{0}{\infty}$, $\frac{\infty}{0}$, $\infty + \infty$, $\infty \cdot \infty$, 0^∞, ∞^∞

Integral Tak Wajar Jenis 1 : batas ∞

Di bagian depan kita telah mendefinisikan pengertian integral tentu sebagai limit jumlah Riemann. Konsep integral tentu ini didefinisikan pada sebuah interval tutup $[a, b]$, dengan $a, b \in \mathbb{R}$. Pada pasal ini akan diperluas arti sebuah integral tentu, bila interval tersebut tak terbatas. Berikut ini disajikan definisi dari integral tak wajar jenis 1, yaitu dengan batas ∞.

a. $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{b} f(x)\,dx$

b. $\displaystyle\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{q\to\infty} \int_{a}^{q} f(x)\,dx$

c. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$

Catatan:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \neq \lim_{t\to-\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx$$

Bila suku-suku di ruas kanan nilainya berhingga, dikatakan integral tak wajar tersebut *konvergen* dan nilainya adalah hasil di ruas kanan.

Contoh:

1. Tentukan (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \sin x\,dx$

2. Tentukan k supaya $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{1+x^2}\,dx = 1$

3. Carilah semua nilai p supaya $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergen.

Integral Tak Wajar Jenis 2: Integran Tak Hingga

Perhatikan hitungan berikut: $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-2}^{1} = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

Hasil ini tidak wajar, sebab $f(x) = \frac{1}{x^2}$ fungsi yang positif, jadi hasil integralnya seharusnya positif juga. Ketidakwajaran ini disebabkan $f(x)$ tidak terdefinisi di $x = 0 \in [-2, 1]$. Integral seperti ini disebut integral tak wajar jenis 2. Perhitungannya tidak boleh langsung menerapkan Teorema Dasar Kalkulus Pertama. Berikut disajikan integral tak wajar jenis 2 serta definisi perhitungannya.

a. Misalkan $\displaystyle\lim_{x\to a^+} |f(x)| = \infty$, maka $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$

b. Misalkan $\displaystyle\lim_{x\to b^-} |f(x)| = \infty$, maka $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{q\to b^-} \int_a^q f(x)\,dx$

c. Misalkan $f(x)$ kontinu pada $[a, b]$ kecuali di $c \in [a, b]$,

maka $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Contoh-Contoh:

1. Tentukan: (a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx$ ♠ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ ●

2. Carilah semua nilai p supaya $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergen. ●

3. Periksa kekonvergenan (a) $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$ ● (b) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx$ ♠

Deret Tak Hingga

Deret merupakan salah satu bagian yang penting dalam bidang matematika. Bila kita menggunakan kalkulator untuk menghitung $\sqrt{4,1}$, $\sin(31^0)$, $\log_2 3$, dan lain-lain, proses melibatkan konsep deret. Bila seseorang mengkaji sifat-sifat gelombang, konsep deret terlibat didalamnya.

Pada bab ini kita akan mempelajari sifta-sifat dasar sebuah deret. Kajian akan diakhiri dengan sebuah metode aproksimasi untuk menghitung nilai fungsi menggunakan deret. Aproksimasi ini mempunyai ketelitian yang lebih tinggi dibandingkan dengan aproksimasi diferensial yang sudah pernah kita bahas sebelumnya.

Sebuah deret (deret tak hingga) adalah sebuah jumlahan berbentuk,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad \text{dengan} \quad a_n \in \mathbb{R}$$

Sebelum kita mengkaji deret, akan diperkenalkan dahulu pengertian barisan.

Barisan Tak Hingga

Barisan tak hingga adalah fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Barisan biasanya hanya dituliskan nilai-nilai fungsinya sebagai berikut:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots \quad \text{dengan} \quad a_n = f(n), \;\; n \in \mathbb{N}$$

Barisan biasa dinotasikan dengan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, atau $\{a_n\}$

Contoh-Contoh:

1. $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ $\qquad 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots$ $\spadesuit$
2. $b_n = 1 - (-1)^n \frac{1}{n}$ $\qquad 2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{5}, \frac{5}{6}, \frac{8}{7}, \frac{7}{8}, \cdots$ $\spadesuit$
3. $c_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ $\qquad 0, \frac{3}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{-4}{5}, \frac{7}{6}, \frac{-6}{7}, \frac{9}{8}, \cdots$ $\spadesuit$
4. $d_n = 0,999$ $\qquad 0,999\,;\ 0,999\,;\ 0,999\,;\ 0,999\,;\ \cdots$ $\spadesuit$

Bila $n \to \infty$, cenderung menuju nilai berapakah suku barisan di atas ?

Definisi Barisan Konvergen: Barisan $\{a_n\}$ disebut *konvergen* ke L, ditulis $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, artinya untuk setiap $\epsilon > 0$, dapat dicari bilangan asli K sehingga untuk $n \geq K \implies |a_n - L| < \epsilon$. Barisan yang tidak konvergen disebut *divergen*. *Animation*

Contoh: Dengan definisi di atas, tunjukkan $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ konvergen ke 1. ♠

Perhatikan barisan $c_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

Bila kita perhatikan nilai suku-suku barisan tersebut adalah sebagai berikut

$$0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{2}{3},\ \frac{5}{4},\ -\frac{4}{5},\ \frac{7}{6},\ -\frac{6}{7},\ \cdots,\ \frac{1001}{1000},\ -\frac{1000}{1001},\ \frac{1003}{1002},\ -\frac{1002}{1003},\ \cdots$$

Perhatikan bahwa sukus-suku ganjil (warna biru), "cenderung" menuju -1, sedangkan suku-suku yang genap (warna hijau), "cenderung" menuju 1. Jadi suku-suku barisan akan berosilasi disekitar -1 dan 1. Gunakan definisi di atas untuk membuktikan barisan ini divergen.

Sifat-sifat limit sebuah barisan, sama dengan sifat-sifat limit di tak hingga dari sebuah fungsi real. Hal ini dapat dimaklumi, karena barisan juga merupakan fungsi. Berikut disajikan sifat-sifat tersebut,

Sifat-Sifat:

Misalkan $\{a_n\}, \{b_n\}$ barisan[2] yang konvergen, $k \in \mathbb{R}$ dan $p \in \mathbb{N}$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} k = k$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ syarat $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$
- Misalkan $a_n = f(n)$. Bila $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ maka $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = L$
- *Prinsip Apit*: Misalkan $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, dan $\{c_n\}$ barisan[2] dengan sifat $a_n \leq c_n \leq b_n$ untuk suatu $n \geq K$ (mulai indeks yang K).
  Bila $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$ maka $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$

Latihan:

1. Tentukan $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2}{7n^2+1}$
2. Tentukan $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{e^n}$
3. Tentukan $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin^3 n}{n}$
4. Misalkan $-1 < r < 1$, tunjukkan $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$

   (*perhatikan* $\frac{1}{|r|} > 1$, *lalu tulis* $\frac{1}{|r|} = 1 + p$, *tunjukan* $0 \leq |r|^n \leq \frac{1}{pn}$)

   bagaimanakah nilai $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ bila $|r| \geq 1$?

Barisan Monoton

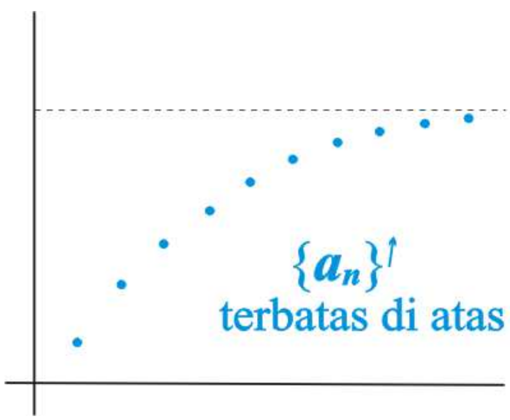
Pengertian kemonotonan pada barisan sama dengan pengertian kemonotonan pada fungsi real. Sebuah barisan $\{a_n\}$ disebut **monoton tak turun**, dinotasikan $\{a_n\}^{\uparrow}$, bila memenuhi $a_n \leq a_{n+1}$. Barisan $\{a_n\}$ disebut **monoton tak naik**, dinotasikan $\{a_n\}_{\downarrow}$, bila memenuhi $a_n \geq a_{n+1}$.

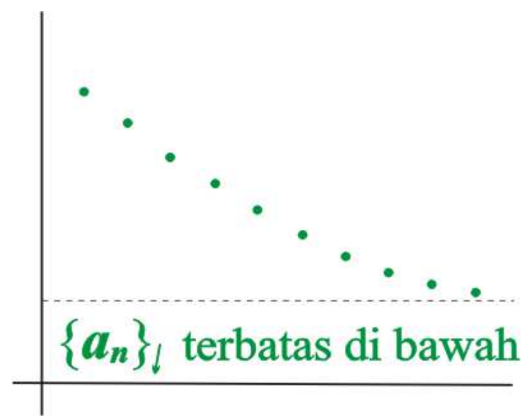
Untuk menguji kekonvergenan sebuah barisan monoton, selain menggunakan sifat-sifat yang telah kita bahas, dapat pula menggunakan sifata berikut ini:

Sifat:

- Bila $\{a_n\}^{\uparrow}$ dan terbatas di atas, maka $\{a_n\}$ konvergen.
- Bila $\{a_n\}_{\downarrow}$ dan terbatas di bawah, maka $\{a_n\}$ konvergen.

Catatan: Pada sifat di atas, kemonotonan barisan yang diuji tidak perlu dari awal, tetapi cukup dimulai dari suatu indeks tertentu.





Contoh: Buktikan barisan $\{b_n\}$ dengan $b_n = \frac{n^2}{2^n}$ konvergen

Catatan. *Untuk menunjukan sebuah barisan $\{a_n\}$ monoton, gunakan salah satu cara berikut:*

- Periksa tanda dari $a_{n+1} - a_n$
- Bila a_n selalu positif atau selalu negatif, periksa nilai dari $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.
- Bila $a_n = f(n)$, bentuk fungsi real $f(x)$, lalu periksa tanda dari $f'(x)$.

Deret Tak Hingga

Deret tak hingga merupakan jumlahan dari suku-suku sebuah barisan.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{dengan } a_n \in \mathbb{R}.$$

Tetapkan barisan $\{S_n\}$ sebagai berikut:

$$\underbrace{a_1}_{S_1},\ \underbrace{a_1 + a_2}_{S_2},\ \underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{S_3},\ \cdots,\ \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}_{S_n},\ \cdots$$

Barisan ini disebut barisan jumlah parsial dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Dari definisi ini secara intuitif bila $n \to \infty$ maka $S_n \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Dalam matematika, kondisi seperti ini kita formalkan dalam bentuk definisi berikut:

Definisi: Sebuah deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ disebut konvergen ke S bila $\lim_{n \to \infty} S_n = S$.

Secara umum, memeriksa kekonvergenen sebuah deret umumnya sukar. Pada bab ini akan dikaji berbagai bentuk deret yang mempunyai karakteristik khusus sehingga kekonvergenannya dapat diuji dengan lebih mudah.

Deret Geometri

Sebuah deret disebut deret geometri, bila suku-sukunya memenuhi hubungan $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$, dengan r konstanta, disebut pengali (*ratio*).

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} \qquad a, r \in \mathbb{R}$$

Berikut disajikan teorema untuk menguji kekonvergenan deret geometri,

Sifat: Deret geometri $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$ konvergen $\iff |r| < 1$. Bila deret tersebut konvergen, nilainya $S = \frac{a}{1-r}$ ♠

Contoh: Tentukan nilai deret $\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \frac{4}{81} + \cdots$

Suku-suku sebuah deret yang konvergen memiliki sifat khusus,

Sifat: Jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen maka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Kontra positif dari sifat di atas adalah,

Sifat, Uji Suku Ke n: Jika $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen.

Sifat terakhir ini berguna untuk menguji kedivergenen sebuah deret.

Contoh: Periksa kekonvergenan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2n^3+2n}$

Deret harmonik

Deret harmonik adalah deret berbentuk: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Bila kita periksa dengan uji suku ke n, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Karena limitnya bernilai nol, Uji suku ke n tidak menghasilkan kesimpulan.

Sifat: Deret harmonik divergen ke ∞ ♠

Deret harmonik banyak sekali digunakan sebagai deret pembanding untuk menguji kekonvergenan deret lain. Kita akan membahasnya pada beberapa pasal berikutnya.

Deret Teleskopik/Kolaps :

$$\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4}\right) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

Jumlah parsial ke n, $S_n = \dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_{n+1}}$

Contoh: Periksa kekonvergenan deret $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$

Sifat Linear: Jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ deret yang konvergen dan $c \in \mathbb{R}$ maka

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Sifat: Jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen dan $c \neq 0$ maka $\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n$ divergen

Contoh: Periksa kekonvergenan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n}$

Pengelompokan Suku-Suku Deret

Perhatikan sebuah deret $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Bolehkan kita mengelompokkan suku-suku deret tersebut?

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5 + a_6) + c_7 + (a_8 + \cdots + a_{100}) + \cdots + a_n + \cdots$$

Untuk memeperoleh jawabnya, perhatikan deret berikut:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} \neq 0$, jadi deret ini divergen.

Sekarang kita kelompokkan suku-sukunya sebagai berikut:

Pengelompokan a: $(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots \longrightarrow 0$

Pengelompokan b: $1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) + \cdots \longrightarrow 1$

Ternyata hasilnya dapat dibuat konvergen dengan nilai yang berbeda-beda, tergantung pola pengelompokkannya. Hal ini tentu saja salah. Sifat berikut menjamin kapan sebuah deret boleh dikelompokkan,

Sifat: Sebuah deret yang konvergen suku-sukunya boleh dikelompokkan dan nilainya tidak akan berubah.

Catatan: Meskipun deret yang konvergen suku-sukunya boleh dikelompokkan, tapi posisi suku-sukunya tidak boleh diubah/dipertukarkan.

Deret Positif

Pada pasal sebelumnya kita telah membahas beberapa deret khusus serta pengujian kekonvergenannya. Sebagaimana telah dikemukakan, pengujian kekonvergenan deret secara umum tidaklah mudah. Khusus bila suku-suku deret bersifat tak negatif, kita mempunyai berbagai alat uji. Untuk itu pada pasal ini akan dikaji teorema-teorema untuk menguji kekonvergenan dari deret yang suku-sukunya tak negatif.

Definisi: Sebuah deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ disebut deret positif bila $a_n \geq 0$.

Uji Jumlah Terbatas:

Deret positif $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen $\Longleftrightarrow$ jumlah parsialnya, S_n, terbatas di atas.

Contoh: Tunjukkan $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$ konvergen.

Uji Integral:Diberikan deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ dengan $a_n = f(n)$. Tetapkan fungsi $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Bila $f(x)$ kontinu, positif dan tak naik pada $[1, \infty]$ maka $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen $\Longleftrightarrow$ $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)\, dx$ konvergen. ♠

Perhatikan, pada uji di atas nilai $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \neq \int\limits_{1}^{\infty} f(x)\, dx$

Meskipun nilai deret dan integral tersebut tidak sama, tetapi nilai integral tersebut kadang-kadang dijadikan hampiran dari nilai deretnya.

Contoh^2:

1. Uji kekonvergenan deret $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$
2. Deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ diaproksimasi nilainya memakai 5 suku pertama $\sum\limits_{n=1}^{5} \frac{n}{e^n}$, sehingga galatnya adalah $\sum\limits_{n=6}^{\infty} \frac{n}{e^n}$. Aproksimasilah galat tersebut memakai integral tak wajar.

Uji Deret-p: $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ dengan p konstanta.

Deret-p konvergen untuk $p>1$ dan divergen untuk $p\leq 1$. ♠

Contoh: Periksa kekonvergenan deret $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{0,001}}$

Uji Banding: Misalkan $0\leq a_n\leq b_n$ untuk $n\geq K$, $K\in\mathbb{N}$.

- Bila $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen
- Bila $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen maka $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergen

Contoh: Periksa kekonvergenan (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n^2-4}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(n+1)}$ (c) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)^2}$

Uji Banding Limit: Misalkan $a_n\geq 0$, $b_n\geq 0$ dan $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$.

- Bila $0<L<\infty$ maka kekonvergenan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ bersamaan.
- Bila $L=0$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen

Contoh: Periksa kekonvergenan (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n^3-2n^2+11}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+19n}}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$

Uji Hasil Bagi: Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ deret positif dengan $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$

- Bila $\rho<1$ deret konvergen.
- Bila $\rho>1$ deret divergen.
- Bila $\rho=1$ tidak diperoleh kesimpulan

Contoh: Periksa kekonvergenan (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^{100}}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

(*untuk soal c, gunakan sifat* $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$) .

Ringkasan: Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sebuah deret positif

- Jika $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ maka deret divergen.
- Jika a_n mengandung $n!$, r^n atau n^n, gunakan uji hasil bagi.
- Jika a_n berbentuk fungsi rasional (pangkat konstan dalan n), gunakan uji banding limit. Sebagai deret pembanding gunakan pangkat tertinggi dari pembilang dibagi penyebut.
- Jika uji-uji di atas gagal, coba dengan uji banding, uji integral atau uji jumlah terbatas.

Catatan: Item 2, 3, dan 4 hanya dapat dipakai untuk deret positif.

Deret Ganti Tanda

Sebuah deret disebut deret ganti tanda bila berbentuk:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \qquad a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Contoh-contoh:

1. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + - \cdots$
2. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + - \cdots$
3. $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + - \cdots$

Tidak ada metode khusus untuk menguji kekonvergenan deret ganti tanda, kecuali untuk deret yang suku-sukunya menurun.

Uji Deret Ganti Tanda

Misalkan $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + - \cdots$ deret ganti tanda dengan $0 < a_{n+1} < a_n$. Bila $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ maka deret konvergen. Selanjutnya, bila nilai deret tersebut diaproksimasi oleh S_n maka galatnya $\leq a_{n+1}$.

Contoh-contoh:

Periksa kekonvergenan deret-deret berikut:

1. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + - \cdots$ (deret harmonik ganti tanda)
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{2^n}$

Kekonvergenen Mutlak dan Bersyarat

Perhatikan deret berikut:

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \cdots \qquad (*)$$

Deret ini tidak dapat diuji dengan Uji Deret Ganti Tanda karena bukan deret ganti tanda.

Bila setiap suku dari deret tersebut dimutlakkan maka diperoleh deret:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \cdots$$

Deret mutlaknya ini konvergen karena merupakan deret p dengan $p = 2$

Hubungan kekonvergenan sebuah deret dengan kekonvergenan deret mutlaknya diberikan oleh sifat berikut ini,

Sifat Bila $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergen maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen.

Dengan sifat di atas, maka kita dapat menyimpulkan deret (*) konvergen.

Berikan contoh sebuah deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yang konvergen tapi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergen.

- Bila $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergen, dikatakan deret tersebut konvergen mutlak.
- Bila $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen tetapi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergen, dikatakan deret konvergen bersyarat.

Contoh: Periksa kekonvergenan (mutlak/bersyarat/divergen) deret^2 berikut:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{n^2}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{2^n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3+3n}{n^5-4n^2+1}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

Uji Hasil Bagi Mutlak

Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sebuah deret (sebarang). Tetapkan $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

a. Jika $\rho < 1$ deret konvergen mutlak.

b. Jika $\rho > 1$ deret divergen.

c. Jika $\rho = 1$ tidak diperoleh kesimpulan

Contoh: Periksa jenis kekonvergenan $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n!}$

Teorema Penukaran Tempat

Suku-suku sebuah deret yang konvergen mutlak boleh dipertukarkan posisinya, nilai deretnya tidak berubah.

Perhatikan deret harmonik ganti tanda:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$$

Dengan melakukan pengelompokkan dan penukaran posisi suku-sukunya, tunjukkan nilai deret tersebut dapat dibuat konvergen ke nilai berapapun.

Deret Pangkat

Deret pangkat adalah deret tak hingga yang memuat faktor x^n seperti pada polinom. Perbedaannya kalau polinom suku-sukunya berhingga, sedangkan deret pangkat suku-sukunya tak berhingga. Deret pangkat banyak digunakan untuk aproksimasi nilai fungsi. Hal ini akan kita bahas pada pasal terakhir dari bab ini.

Deret Pangkat Dalam x

Bentuk Umum: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ dengan $x \in \mathbb{R}$

Pada notasi di atas disepakati $a_0 x^0 = a_0$, berapapun nilai x.

Kajian deret pangkat umumnya meliputi dua hal:

- Mencari semua titik $x \in \mathbb{R}$ supaya deret tersebut konvergen.
- Menentukan nilai dari deret pangkat tersebut.

Sebagai ilustrasi awal, perhatikan deret: $a + ax + ax^2 + \cdots,\ \ a$ konstanta.

Deret ini merupakan deret geometri dengan pengali x. Dari pembahasan deret geometri, telah kita ketahui deret ini akan konvergen untuk $-1 < x < 1$. Nilainya adalah $S(x) = \frac{a}{1-x}$. Perhatikan bahwa nilai deret pangkat tersebut berupa fungsi dari x.

$$a + ax + ax^2 + \cdots = \tfrac{a}{1-x} \quad -1 < x < 1$$

Himpunan dari semua nilai x yang menyebabkan suatu deret pangkat konvergen disebut Himpunan/Daerah Kekonvergenan.

Pada deret di atas, himpunan kekonvergenannya $-1 < x < 1$.

Untuk menentukan himpunan kekonvergenan sebuah deret pangkat, kita dapat menggunakan sifat-sifat deret yang telah dibahas. Salah satu alat uji yang sering digunakan adalah Uji Hasil Bagi Mutlak.

Contoh: Tentukan himpunan kekonvergenan dari deret-deret berikut:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}$ 2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 3. $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$

Himpunan kekonvergenen deret pangkat selalu berupa salah satu dari:

- Satu titik yaitu $\{0\}$, dikatakan jari-jari kekonvergenannya 0.
- Sebuah selang/interval buka/tutup/setengah buka, misalnya $(-R, R)$, jari-jari kekonvergenannya R.
- Seluruh $\mathbb{R}$, dikatakan jari-jari kekonvergenannya ∞.

Sebuah deret pangkat dikatakan konvergen mutlak pada interval kekonvergenannya bila deret tersebut konvergen pada seluruh interval termasuk kedua titik ujungnya. Bila salah satu dari titik ujungnya tidak termasuk dalam himpunan kekonvergenannya, maka deret pangkat tersebut dikatakan konvergen mutlak *di dalam* interval kekonvergenannya. Pada contoh 1 di atas, deret tersebut konvergen mutlak di dalam interval kekonvergenannya.

Deret Pangkat Dalam $x - a$

Bentuk Umum: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots$

Himpunan kekonvergenennya selalu berupa salah satu dari:

- Satu titik yaitu $\{a\}$, dikatakan jari-jari kekonvergenannya 0.
- Sebuah interval buka/tutup/setengah buka, $(a-R, a+R)$, dikatakan jari-jari kekonvergenannya R.
- Seluruh $\mathbb{R}$, dikatakan jari-jari kekonvergenannya ∞.

Contoh: Tentukan interval dan jari-jari kekonvergenan dari $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)^2}$

Operasi Deret Pangkat

Pada pasal ini akan dikaji berbagai operasi pada sebuah deret pangkat. Melalui operasi deret pangkat ini, kita akan mendapatkan deret pangkat lain, di mana himpunan kekonvergenannya langsung diperoleh dari deret pangkat yang dioperasikan. Operasi-operasi deret pangkat yang akan kita bahas meliputi: pendiferensialan, pengintegralan dan Operasi-operasi Aljabar (tambah, kurang, kali dan bagi)

Perhatikan sebuah deret pangkat yang konvergen ke fungsi $S(x)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = S(x)$$

Misalkan I adalah interval kekonvergenannya dan x titik *di dalam* I, maka:

$$S'(x) == a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{dan}$$

$$\int_0^x S(t)\,dt = a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Contoh: Lakukan operasi pendiferensialan dan pengintegralan pada deret pangkat $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad -1 < x < 1$ untuk memperoleh dua rumus deret berikut:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad -1 < x < 1 \quad \spadesuit$$

Latihan:

1. Lakukan substitusi $x = -t^2$ pada deret $\frac{1}{1-x}$ lalu integralkan untuk memperoleh rumus deret dari $\tan^{-1}(x)$ ●
2. Diberikan deret $S(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad x \in \mathbb{R}$. Lakukan operasi pendiferensialan untuk memperoleh rumus deret e^x. ●

Selain operasi pendiferensialan dan pengintegralan, kita juga dapat melakukan operasi aljabar antara dua deret pangkat. Opersi penambahan dan pengurangan dua deret pangkat dilakukan suku demi suku terhadap pangkat yang sama. Di bawah ini diilustrasikan operasi perkalian dan pembagian dua deret pangkat (dikutip dari buku Varberg, Purcell, Rigdon, *Calculus*, 9th ed., halaman 486).

$$
\begin{array}{l}
0 + x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots \\
1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots \\
\hline
0 + (0+1)x + \left(0 + 1 - \dfrac{1}{2}\right)x^2 + \left(0 + \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right)x^3 \\
\qquad + \left(0 + \dfrac{1}{3!} - \dfrac{1}{2!2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right)x^4 + \cdots \\
\qquad = 0 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + 0 \cdot x^4 + \cdots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 - x^4 + \cdots \\
\hline
1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots & x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots \\
 & \underline{x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \cdots} \\
 & -\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{12}x^4 + \cdots \\
 & \underline{-\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^4 + \cdots} \\
 & \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \cdots \\
 & \underline{\frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^4 + \cdots} \\
 & -x^4 + \cdots
\end{array}
$$

Deret Taylor dan Maclaurin

Pada pasal sebelumnya kita telah melihat bahwa sebuah deret pangkat yang konvergen akan konvergen ke suatu fungsi $S(x)$. Pada pasal ini akan dipelajari proses sebaliknya, yaitu menyatakan sebuah fungsi dalam bentuk deret pangkat.

Diberikan sebuah fungsi $f(x)$ dan konstanta a. akan dicari bilangan-bilangan $c_0, c_1, c_2, \cdots$ sehingga berlaku hubungan berikut:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots \tag{1}$$

Kita turunkan kedua ruas dari persamaan (**??**),

$$\begin{cases} f'(x) &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \\ f''(x) &= 2!\,c_2 + 6\,c_3(x-a) + 12\,c_4(x-a)^2 + 20\,c_5(x-a)^3 + \cdots \\ f'''(x) &= 3!\,c_3 + 24\,c_4(x-a) + 60\,c_5(x-a)^2 + 120\,c_6(x-a)^3 + \cdots \\ \quad\vdots & \end{cases}$$

Substitusikan $x = a$ pada tiap persamaan di atas, maka diperoleh:

$$c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a), \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \quad \cdots \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{2}$$

Teorema Ketunggalan Taylor

Misalkan fungsi $f(x)$ dapat diturunkan secara terus menerus, maka fungsi tersebut dapat dinyatakan secara tunggal dalam bentuk deret

$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$

Deret tersebut dinamakan **Deret Taylor dari $f(x)$ di sekitar** $x = a$. Dalam hal $a = 0$ dinamakan **Deret MacLaurin**.

Apakah sebuah deret Taylor menggambarkan fungsi semula pada setiap titik $x \in \mathbb{R}$? Sebagai ilustrasi, perhatikan deret $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ Untuk $x = -2$, jelas ruas kiri dan ruas kanan tidak sama. Berikut ini disajikan teorema yang memberi jaminan pada titik x mana saja sebuah deret Taylor menggambarkan fungsi semula.

Teorema Taylor: Misalkan $f(x)$ dapat diturunkan terus pada interval $(a-r, a+r)$, maka deret Taylor

$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$

akan menggambarkan $f(x)$ pada interval tersebut bila

$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = 0$ dengan $c \in (a-r, a+r)$

Suku $R_n(x)$ disebut suku sisa Taylor.

Latihan:

1. Tentukan deret Maclaurin dari $f(x) = \sin(x)$ dan tunjukkan hasilnya berlaku untuk semua $x \in \mathbb{R}$.
2. Dengan menguraikan $\ln(x+1)$ atas deret Maclaurin, aproksimasilah nilai $\int\limits_0^1 \ln(x+1)\, dx$ memakai 5 suku pertama dari deret tersebut.

Berikut ini disajikan beberapa deret Maclaurin yang umum dijumpai:

1. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad -1 < x < 1$
2. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad -1 < x < 1$
3. $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad -1 < x < 1$
4. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
5. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$
6. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$
7. $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$
8. $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$
9. $(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \cdots \qquad -1 < x < 1$

   dengan $\binom{p}{k} = \frac{p\cdot(p-1)\cdot\dots\cdot(p-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot k}$

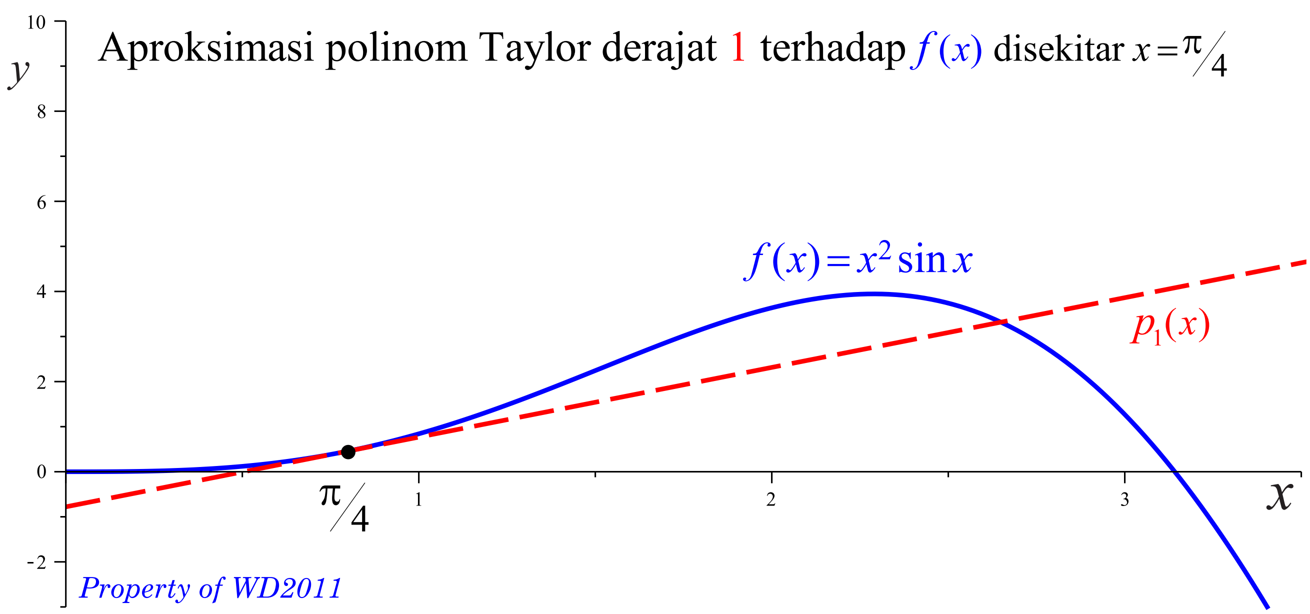
Aproksimasi Polinom Taylor untuk Fungsi

Dalam perhitungan matematika, terutama untuk fungsi-fungsi transenden, sering sekali dijumpai kesukaran dalam menghitung nilai fungsi tersebut. Sebagai contoh, $\sin(\frac{\pi}{7})$, $\sqrt{4,1}$, $\log_2 7$, dan lain-lain. Bila kita hitung nilainya menggunakan kalkulator/komputer, maka yang diperoleh adalah nilai hampirannya. Ada berbagai macam teknik hampiran yang dapat digunakan, namun prinsip dasarnya menggunakan polinom. Penggunaan polinom sebagai fungsi hampiran didasarkan dua alasan berikut:

- Setiap fungsi kontinu selalu dapat dihampiri oleh polinom
- Nilai sebuah polinom selalu mudah untuk dihitung

Pada pasal ini akan dibahas hampiran menggunakan polinom Taylor.

Untuk mendapatkan gambaran intuitif, perhatikanlah animasi di bawah ini. Pada animasi tersebut, fungsi $f(x) = x^2 \sin(x)$ dihampiri secara berturutan oleh polinom derajat 1, 2, 4 dan 8. Semakin tinggi derajat polinom yang digunakan, hampiran tersebut terlihat semakin baik.



Catatan: Untuk menghentikan jalannya animasi, tekan tombol mouse pada gambar tersebut.

Aproksimasi Linear / Polinom Taylor derajat satu

Misalkan $f(x)$ sebuah fungsi yang dapat diturunkan pada interval buka I yang memuat titik a. Akan dikonstruksikan polinom derajat satu yang menghampiri $f(x)$ sebagai berikut:

$$f(x) \approx p_1(x) = c_0 + c_1(x-a) \tag{3}$$

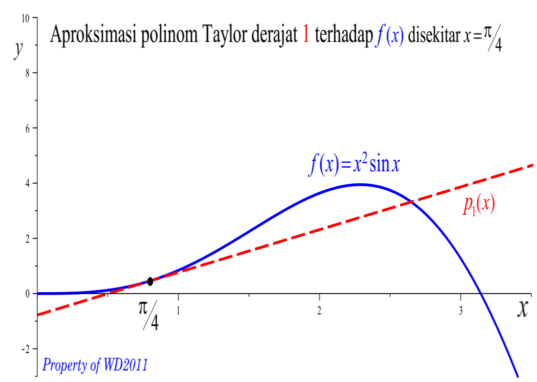
Pada masalah ini, kita harus menentukan nilai c_0 dan c_1 agar hampiran tersebut 'baik', artinya polinom $p_1(x)$ 'dekat' dengan fungsi $f(x)$. Kriteria yang digunakan adalah:

$$f(a) = p_1(a) \qquad \text{dan} \qquad f'(a) = p_1'(a)$$

Substitusikan masing-masing kriteria di atas pada persamaan (**??**) maka akan diperoleh $c_0 = f(a)$ dan $c_1 = f'(a)$.

$p_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

Polinom $p_1(x)$ disebut hampiran Taylor derajat 1 dari $f(x)$ disekitar titik $x = a$.



Contoh: Hampiri nilai $\ln(0,9)$ dengan polinom Taylor derajat satu. ♠

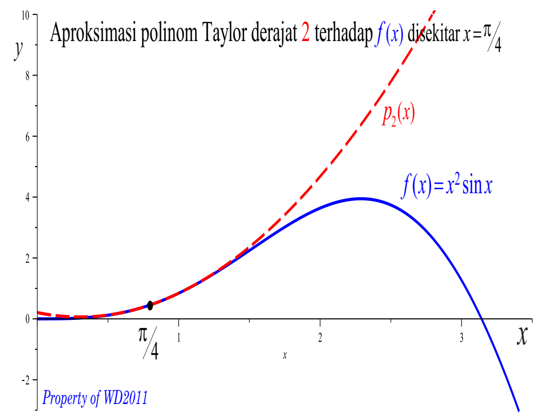
Aproksimasi kuadrat / Polinom Taylor derajat dua

Pada hampiran Taylor derajat satu, terlihat bahwa untuk titik yang jauh dari titik a, nilai hampirannya kurang baik. Salah satu upaya perbaikannya adalah dengan meningkatkan derajat dari polinom yang digunakan. Untuk itu kita akan membahas hampiran Taylor derajat dua.

$$f(x) \approx p_2(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 \tag{4}$$

Kita harus menentukan koefisien c_0, c_1 dan c_2. Kriteria yang digunakan adalah: $f(a) = p_2(a), \quad f'(a) = p_2'(a) \quad f''(a) = p_2''(a)$

Substitusikan masing-masing kriteria di atas pada persamaan (??) maka akan diperoleh $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, dan $c_2 = \frac{f''}{2!}$.



$$p_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''}{2!}(x-a)^2$$

Polinom $p_2(x)$ disebut hampiran Taylor derajat 2 dari $f(x)$ disekitar titik $x = a$.

Contoh: Hampiri nilai $\ln(0,9)$ dengan polinom Taylor derajat dua. ♠

Aproksimasi Polinom Taylor derajat n

Bentuk umum polinom Taylor derajat n untuk menghampiri $f(x)$ adalah:

$$f(x) \approx p_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n \quad (5)$$

dengan kriteria

$$f(a) = p_2(a), \quad f'(a) = p_2'(a) \quad f''(a) = p_2''(a), \cdots f^{(n)}(a) = p_n^{(n)}(a)$$

Substitusikan masing-masing syarat tersebut pada (??), maka diperoleh:

$$c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a), \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \quad \cdots, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Jadi, bentuk umum hampiran polinom Taylor orde n dari fungsi $f(x)$ disekitar titik a adalah:

$$f(x) \approx p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Hal khusus, bila $a = 0$ maka $p_n(x)$ disebut polinom Maclaurin:

$$f(x) \approx p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Soal-Soal:

1. Hampiri nilai $\ln(0,9)$ dengan polinom Taylor derajat empat. ♠
2. Tuliskan polinom Maclaurin orde n dari $f(x) = e^x$. ●

Galat/Error/Kesalahan

Galat adalah perbedaan nilai dari suatu besaran dengan nilai hampirannya.

ilustrasi: $\cos(0,2) \approx 1 - \frac{1}{2!}(0,2)^2 + \frac{1}{4!}(0,2)^4 \approx 0,9800667$

galat metode (galat pemotongan) | galat perhitungan (galat pembulatan)

Galat pemotongan terjadi karena adanya pemotongan rumus matematika tertentu, sedangkan galat pembulatan diakibatkan karena keterbatasan penyimpanan bilangan pada alat hitung kita.

Perlu diperhatikan, **walaupun hasil hitungan numerik selalu berupa hampiran**, bila sumber galatnya hanya galat pemotongan, maka **kita dapat mengatur besar galat yang terjadi sesuai dengan kebutuhan**. Hal ini dijamin oleh rumus berikut:

Rumus Sisa Taylor

Misalkan $f(x)$ fungsi yang dapat diturunkan sampai $(n+1)$ kali disekitar titik a, maka

$$f(x)=f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

dengan $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, c diantara x dan a (suku sisa Taylor)

Secara umum nilai $R_n(x)$ tidak diketahui, tetapi *batas atasnya* dapat dicari. Semakin besar n yang digunakan umumnya $R_n(x)$ makin kecil, mengapa?

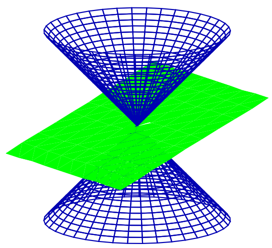
Latihan:

1. Taksirlah batas galatnya bila $\ln(0,9)$ dihampiri dengan $p_4(x)$. ♠
2. Hampiri $e^{0,8}$ dengan galat tidak melebihi 0,001 ●
3. Galat suatu hasil perhitungan numerik adalah E $= \left|\frac{c^2 - \sin c}{c}\right|$ dengan $2 \le c \le 4$. Taksirlah batas maksimum galat tersebut. ●

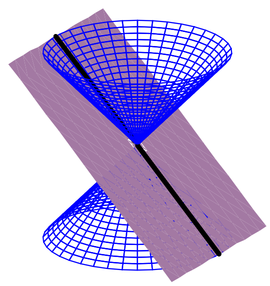
Irisan Kerucut

animation 1 animation 2

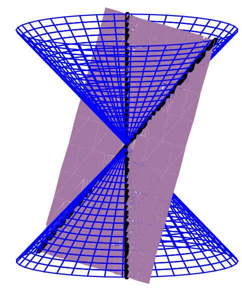
Irisan kerucut adalah kurva yang terbentuk dari perpotongan antara sebuah kerucut dengan bidang datar. Kurva irisan ini dapat berupa satu titik, satu garis lurus, dua garis lurus yang berpotongan, elips, lingkaran, parabola dan hiperbola.



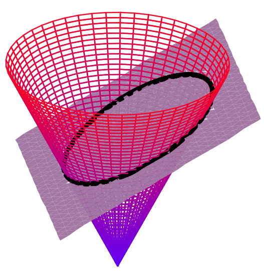
Titik



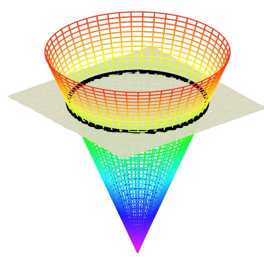
Satu garis



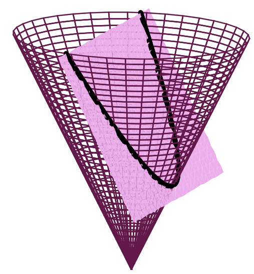
Sepasang garis



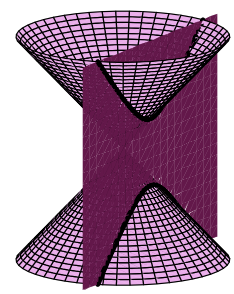
Elips



Lingkaran

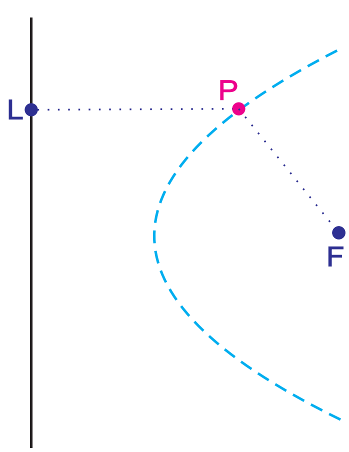


Parabola



Hiperbola

Irisan kerucut yang berupa elips/lingkaran, parabola dan hyperbola disebut **Conic**. Secara umum conic dapat diformulasikan sebagai berikut:



Perhatikan sebuah garis lurus dan sebuah titik F diluar garis tersebut. Conic adalah "kumpulan semua titik P yang bersifat $\frac{\overline{\mathsf{PF}}}{\overline{\mathsf{PL}}} = k$ dengan k suatu konstanta. Kumpulan titik-titik ini berbentuk kurva di bidang.

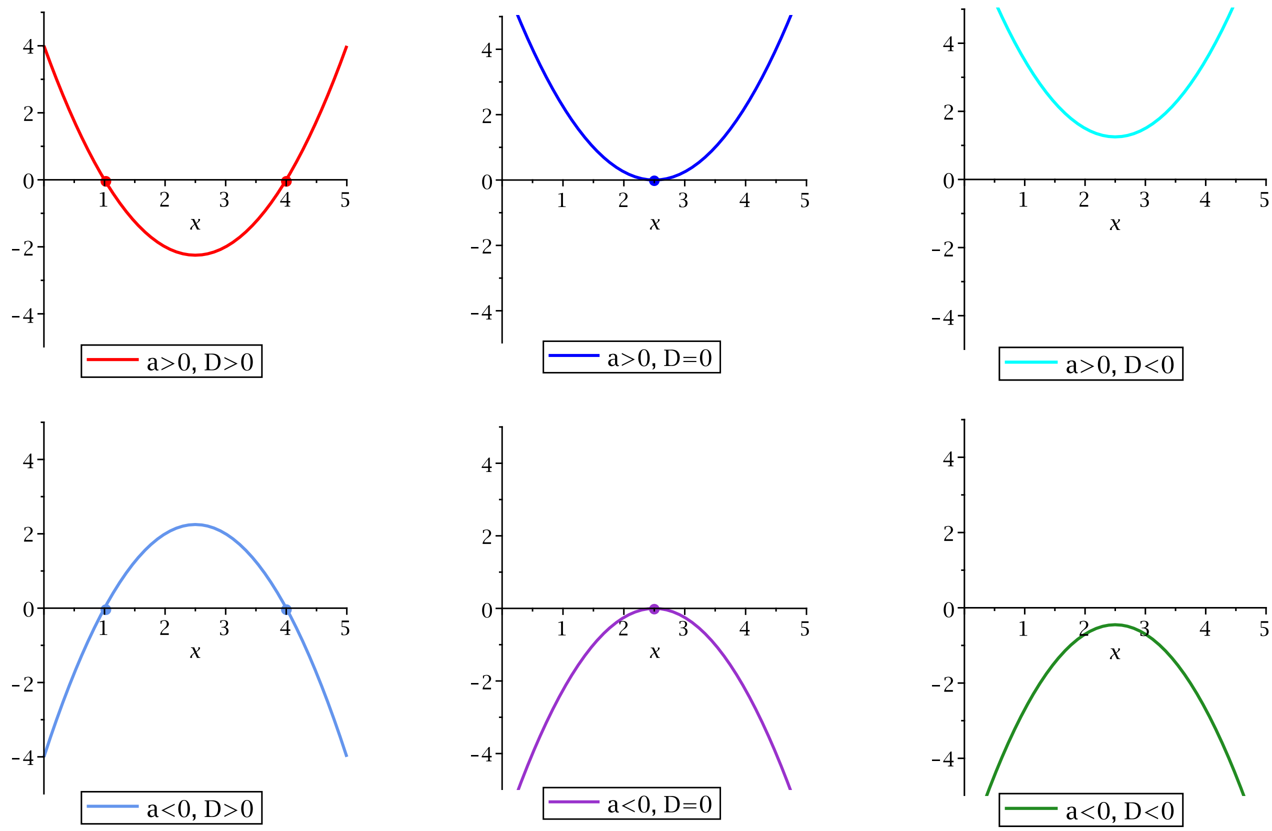
- Elips : conic dengan $0 < k < 1$
- Parabola : conic dengan $k = 1$
- Hiperbola : conic dengan $k > 1$

Penurunan rumus Conic dalam bentuk persamaan x dan y dapat dilihat pada buku-buku kalkulus.

Parabola

Bentuk umum : $y = ax^2 + bx + c$ dengan $a, b,$ dan, c konstanta.

Berikut disajikan grafik dari parabola untuk berbagai nilai $a, b,$ dan, c.



Pada gambar di atas, $D = b^2 - 4ac$, disebut diskriminan.

Puncak parabola adalah $(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$.

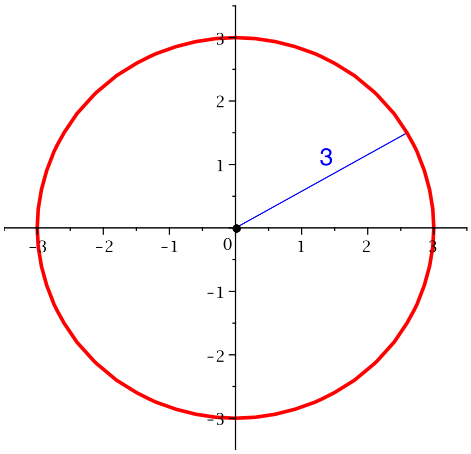
Catatan: Persamaan parabola dapat pula berbentuk $x = ay^2 + by + c$. Grafiknya berbentuk parabola yang membuka ke arah sumbu x positif atau sumbu x negatif.

Elips & Lingkaran

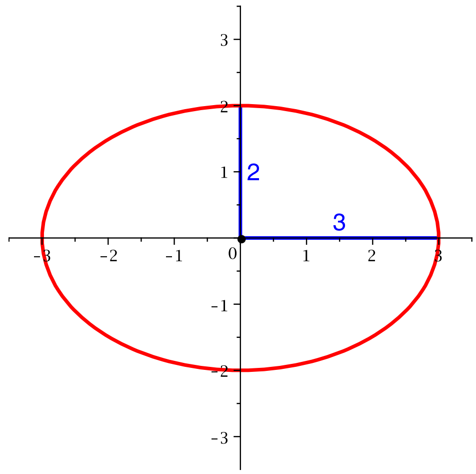
Bentuk umum : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Bila $a = b$, persamaan di atas disebut lingkaran.

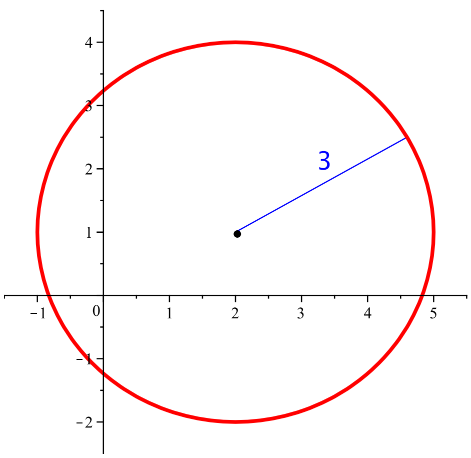
Bila $a \neq b$, persamaan di atas disebut elips.



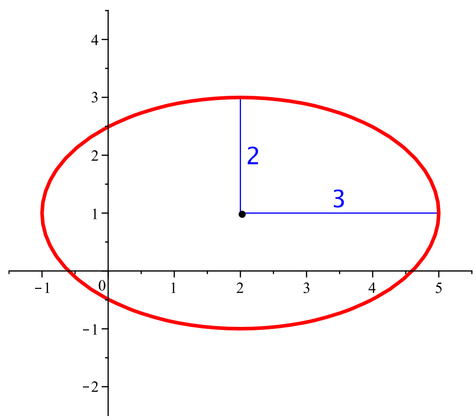
$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$



$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$



$$\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{3^2} = 1$$



$$\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$$

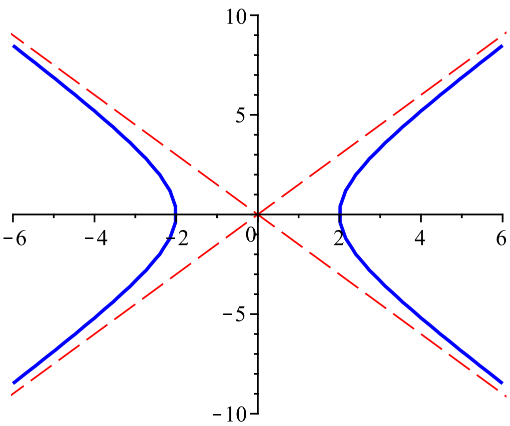
Latihan:

1. Tuliskan persamaan $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$ dalam bentuk baku dan gambarkan.
2. Tuliskan persamaan $4x^2 + y^2 - 16x + 2y + 1 = 0$ dalam bentuk baku dan gambarkan.
3. Tentukan persamaan lingkaran yang ujung garis tengahnya melalui titik $(1, 3)$ dan $(7, 11)$.

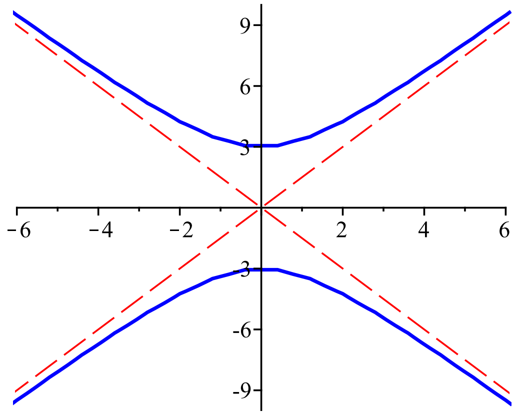
Hiperbola

Bentuk umum : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ atau -$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Hiperbola memiliki sepasang garis asimtot miring $y = \frac{b}{a}$ dan $y = -\frac{b}{a}$

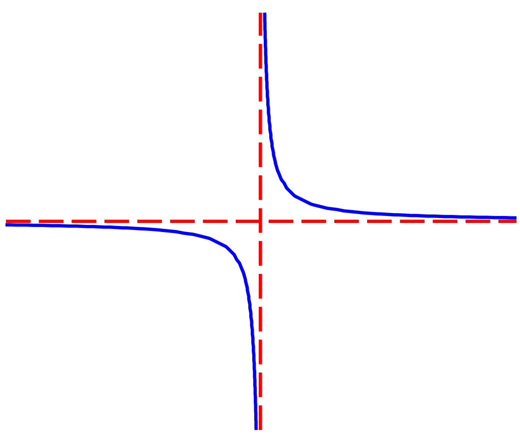


$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$$

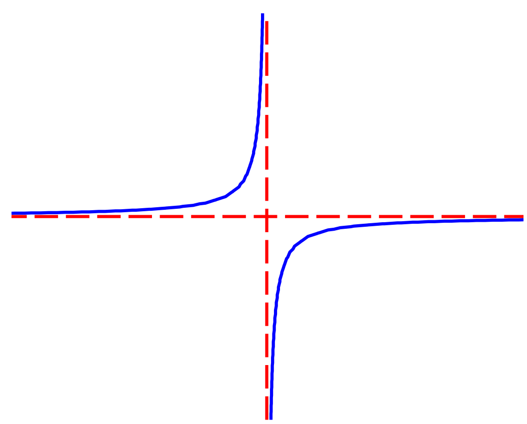


$$-\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

Bila hiperbola di atas kita rotasikan dengan sudut sebesar $\frac{\pi}{2}$ maka akan diperoleh gambar hiperbola seperti di bawah ini.



$$xy = k, \quad k > 0$$

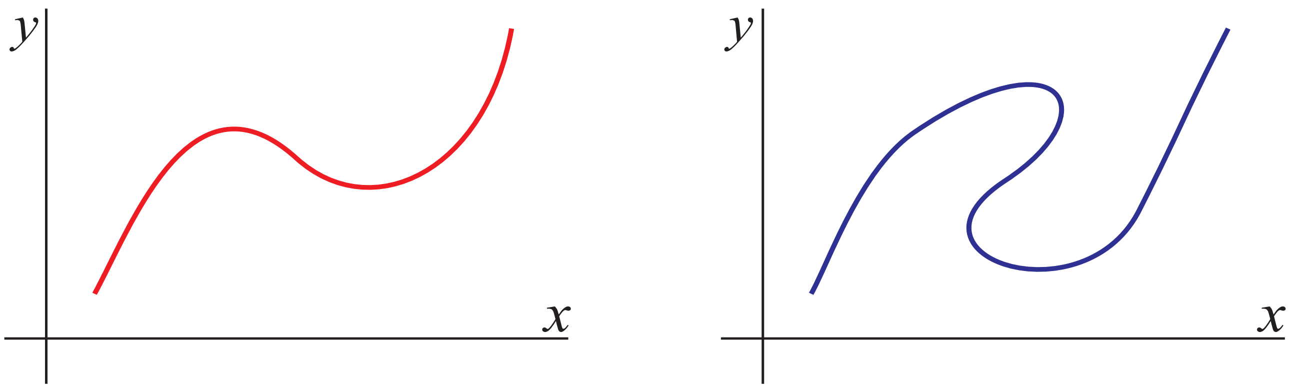


$$xy = k, \quad k < 0$$

Tunjukkan bila hiperbola $x^2 - y^2 = 1$ dirotasikan sebesar $\frac{\pi}{2}$ hasilnya adalah persamaan berbentuk $xy = k$ dan tentukan nilai k.

Persamaan Parameter Kurva di Bidang

Perhatikan sebuah partikel yang bergerak pada bidang datar. Lintasan dari partikel tersebut merupakan sebuah kurva. Pada bagian ini akan dipelajari tata cara merepresentasikan kurva tersebut dalam bentuk persamaan matematika. Perlu dipahami, tidak semua kurva dapat kita nyatakan dalam bentunk fungsi $y = f(x)$. Sebagai ilustrasi, perhatikan dua kurva berikut:

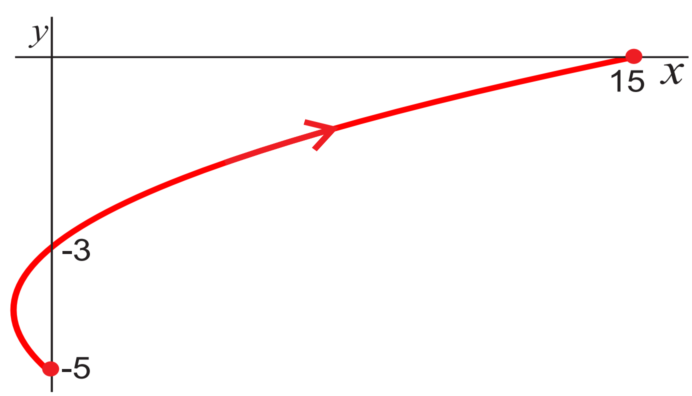


Kurva sebelah kiri dapat dinyatakan secara eksplisit $y = f(x)$, sedangkan kurva sebelah kanan berbentuk persamaan implisit $f(x, y) = 0$. Supaya kurva di bidang dapat direpresentasikan dalam bentuk persamaan eksplisit, maka diperkenalkan penyajian dalam bentuk persamaan parameter.

Misalkan $x = f(t)$ dan $y = g(t)$ dua buah fungsi kontinu pada interval $I = [a, b]$. Pasangan $(x, y) = (f(t), g(t))$ disebut persamaan parameter kurva di bidang dengan parameter t.

Contoh: $x = t^2 + 2t$ dan $y = t - 3 \quad -2 \leq t \leq 3$
Untuk mendapatkan persamaan dalam x dan y, eliminasilah parameter t.

$$y = t - 3 \Longleftrightarrow t = y + 3,$$
$$x = t^2 + 2t$$
$$x = (y + 3)^2 + 2(y + 3)$$
$$x = y^2 + 8y + 15 \qquad -5 \leq y \leq 0$$

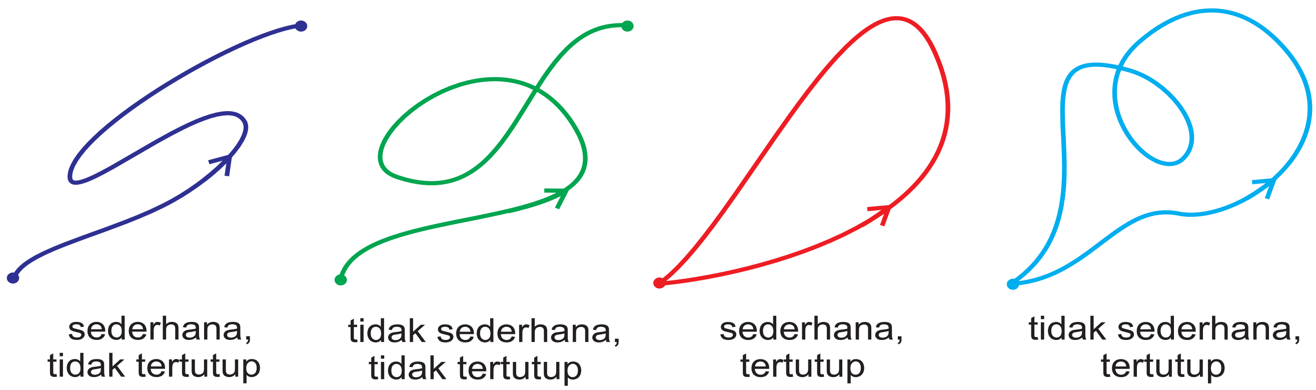


Contoh: Eliminasi parameter t dari $(x, y) = (a \cos t, b \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$, lalu gambarkan ♠

Istilah[2]

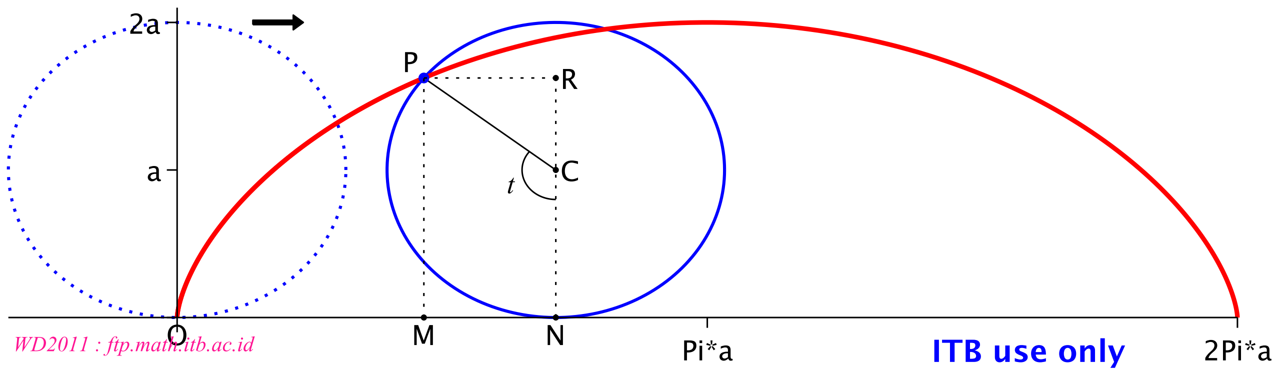
Diberikan persamaan kurva $x = f(t)$ dan $y = g(t)$ $\quad a \leq t \leq b$

- Titik $(x(a), y(a))$ disebut *titik awal*.
- Titik $(x(b), y(b))$ disebut *titik akhir*.
- Bila titik awal dan titik akhir berimpit, kurva disebut *tertutup*.
- Bila untuk setiap $t_1 \neq t_2$ dengan $a < t1, t2 < b$ berlaku $(x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2))$, maka kurva disebut *sederhana*.



Sikloid Animation

Sebuah roda berjari-jari a yang menggelinding sepanjang sumbu-x.



Titik P mula-mula berada di titik asal. Selama menggelinding, jejak titik P digambarkan sebagai kurva berwarna merah. Pada gambar di atas, titik P telah menempuh sudut sebesar t. Kita akan menentukan posisi dari titik $P(x, y)$ sebagai fungsi dari t.

|ON| $=$ panjang busur PN $= at$

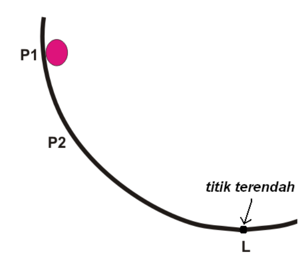
$x =$ |OM| $=$ |ON| - |MN| $= at - a\sin t = a(t - \sin t)$

$y =$ |MP| $=$ |NR| $=$ |NC| $+$ |CR| $= a - a\cos t = a(1 - \cos t)$

Jadi persaman lintasan sikloid adalah $(x, y) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$.

Sikloid mempunyai keistimewaan berikut:

- Sebuah partikel dilepaskan dari titik P1 (lihat gambar di samping) dan bergerak ke bawah sepanjang lengkungan sampai di titik dasar L. waktu tempuhnya akan minimum bila lintasan tersebut berbentuk sikloid.



- Bila dua buah benda masing-masing dari posisi P1 dan P2 dilepaskan, maka keduanya akan menggelinding dan mencapai titik L pada saat yang bersamaan Animation. Fenomena ini dijadikan dasar pembuatan jam bandul Animation

Turunan Fungsi berbentuk Parameter

Misalkan $(x, y) = (f(t), g(t), \quad a \leq t \leq b$ menyatakan persamaan kurva di bidang. Bila $f'(t)$ dan $g'(t)$ ada maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$

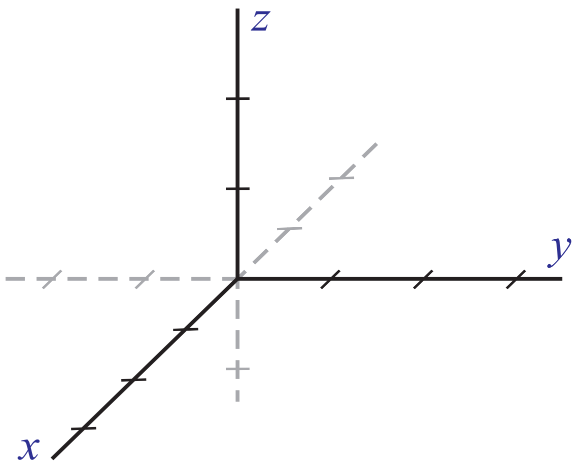
Soal-Soal:

1. Tentukan $\frac{d^2y}{dx^2}$ dari $x = 5\cos t$ dan $y = 4\sin t, \quad 0 < t < 3.$ $\spadesuit$

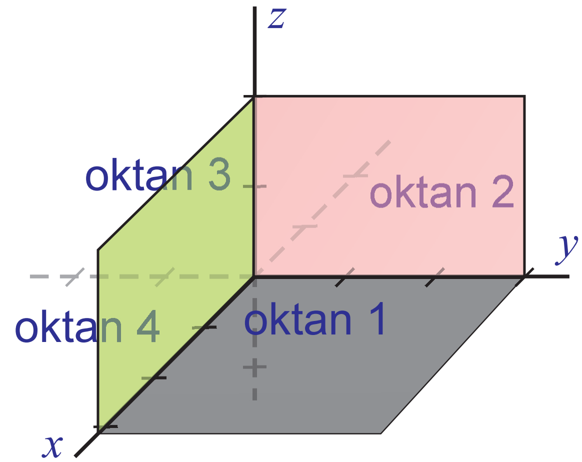
2. Diberikan $x = 2t - 1, \quad y = t^2 + 2,$ Hitung $\int\limits_1^3 xy^2\, dx.$ $\bullet$

3. Hitung luas daerah di atas sumbu x dan di bawah lengkungan sikloid $(x(t), y(t)) = (t - \sin t, 1 - \cos t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ $\bullet$

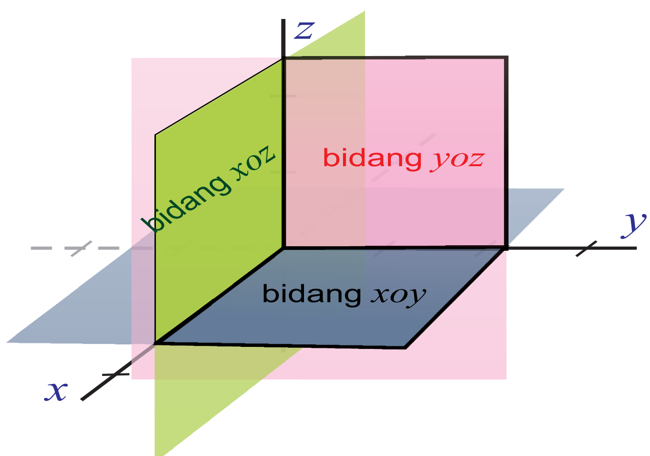
Sistem Koordinat Ruang, $\mathbb{R}^3$



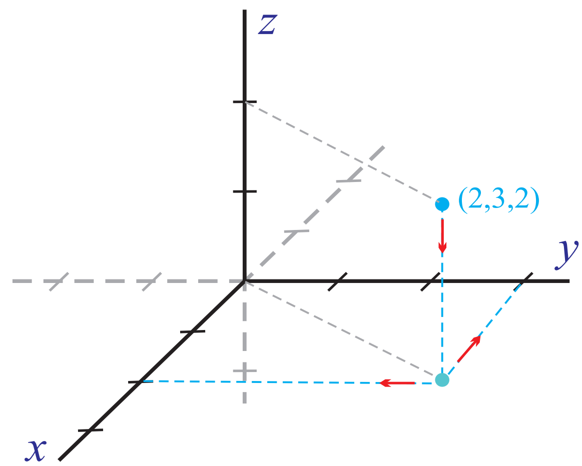
Sistem koordinat $\mathbb{R}^3$



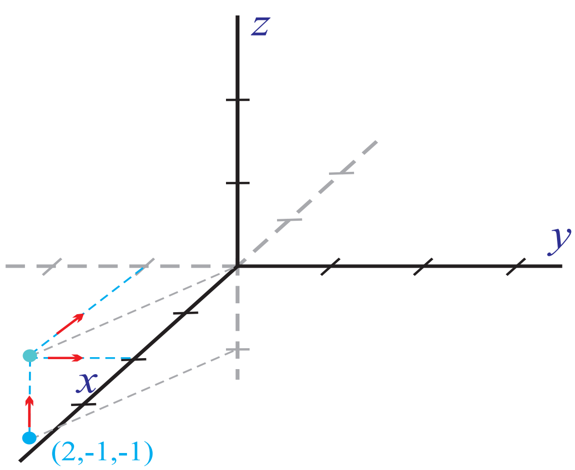
Oktan 1, oktan 2, $\cdots$, oktan 8



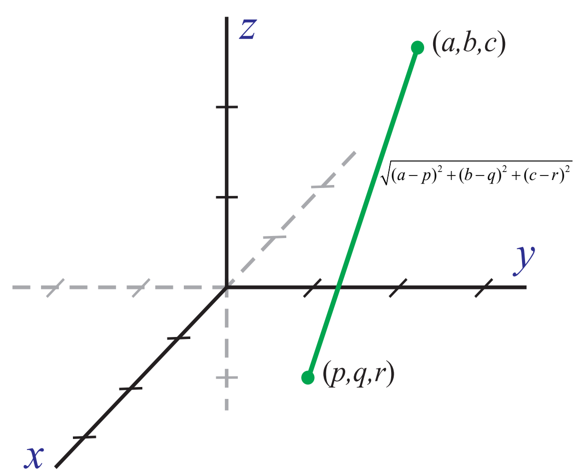
Bidang-bidang koordinat



Representasi titik di $\mathbb{R}^3$



Representasi titik di $\mathbb{R}^3$



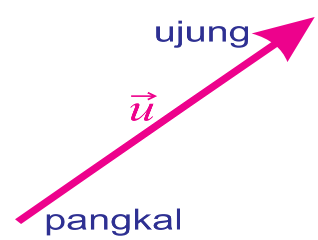
Jarak antara dua titik di $\mathbb{R}^3$

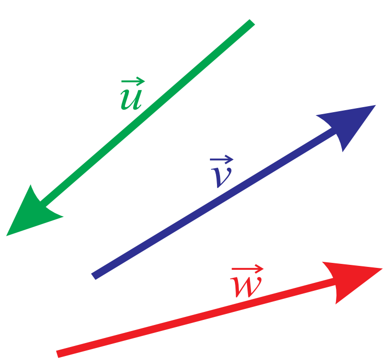
Vektor

Dalam kehidupan sehari-hari kita mengenal dua macam besaran. Besaran pertama adalah besaran yang cukup dinyatakan dalam sebuah nilai, misalnya besaran *panjang, massa, luas, volume, muatan listrik, laju benda yang bergerak, dan lain-lain*. Besaran seperti ini disebut besaran **skalar**. Besaran jenis kedua adalah besaran yang mempunyai **nilai** dan **arah**, seperti. *kecepatan, gaya, torsi, dan lain-lain*. Besaran seperti ini disebut **vektor**.

Untuk lebih memahami pengertian vektor, perhatikanlah ilustrasi berikut ini. Sebuah partikel bergerak sepanjang sumbu-x ke kanan dengan laju 10 meter/detik. Partikel kedua bergerak sepanjang lingkaran berjari-jari 1 meter dengan laju sama. Di dalam fisika, kecepatan partikel pertama adalah konstan (percepatannya nol), sedangkan kecepatan partikel kedua tidak konstan (percepatannya tidak nol). Percepatan pada partikel kedua berfungsi untuk mengubah arah geraknya.

Secara geometri, vektor biasanya digambarkan sebagai anak panah berarah, dan biasa ditulis menggunakan huruf kecil tebal ($\mathbf{u}$) atau huruf kecil dengan anak panah diatasnya ($\vec{u}$).

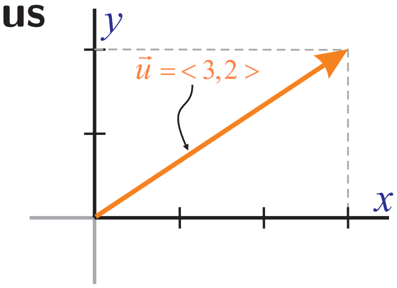




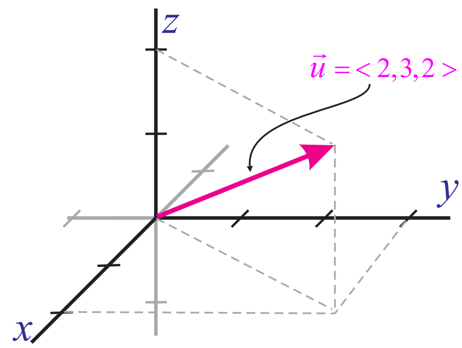
Dalam bidang datar, arah sebuah vektor ditentukan oleh sudut yang dibentuk anak panah tersebut dengan sumbu x positif. Namun di dalam ruang dimensi tiga, arah ini sukar untuk didefinisikan. Untuk itu, kita akan merepresentasikan vektor memakai sistem koordinat.

Nilai/panjang sebuah vektor adalah panjang dari anak panah tersebut. Dengan demikian nilai sebuah vektor selalu tak negatif. Bila sebuah vektor bertanda negatif, hal itu hanya menyatakan arahnya saja.

Representasi Vektor pada Koordinat Kartesius

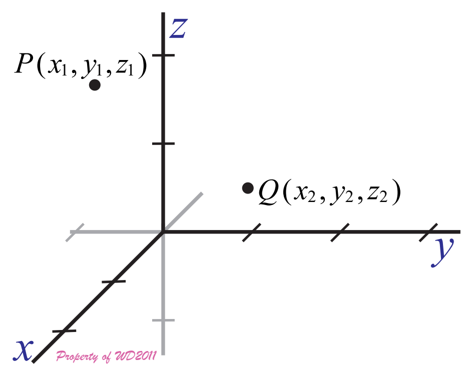


Vektor pada koordinat kartesius digambarkan sebagai anak panah yang berpangkal di pusat koordinat. Untuk membedakan dengan koordinat titik, komponen sebuah vektor dituliskan di dalam kurung lancip, seperti pada ilustrasi di samping ini.



Panjang sebuah vektor $\vec{u}$ diberi notasi $||\vec{u}||$. Misalkan $\vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ dan $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, maka

$$||\vec{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \quad ||\vec{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

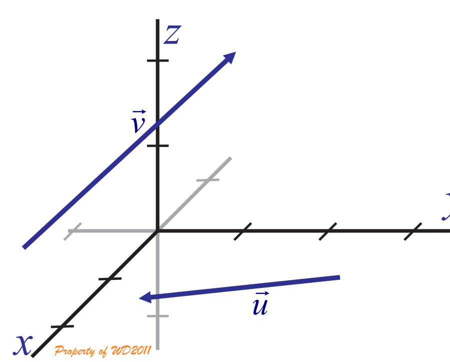


Pangkal sebuah vektor tidak selalu harus berada di pusat koordinat. Sebuah vektor yang berpangkal di titik $P(x_1, y_1, z_1)$ dan ujungnya di $P(x_2, y_2, z_2)$ adalah vektor $\vec{u} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - y_1 \rangle$.

Dua buah vektor dikatakan sama bila panjang dan arahnya sama.

Jadi kesamaan dua buah vektor tidak ditentukan oleh posisinya, tapi oleh panjang dan arahnya.

Penjumlahan Vektor



Misalkan $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ dua buah vektor. Untuk menentukan $\vec{u} + \vec{v}$, kita geser dan tempatkan pangkal vektor $\vec{v}$ pada ujung $\vec{u}$. Hasil penjumlahannya adalah vektor dengan pangkal pada pangkal $\vec{u}$ dan ujungnya pada ujung $\vec{v}$.

Secara aljabar, bila $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ dan $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, maka
$\vec{u} + \vec{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3 \rangle$.

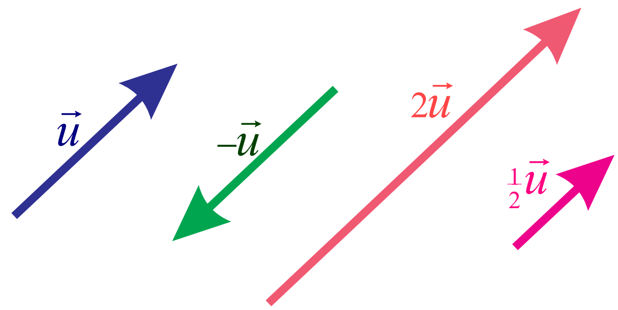
Perkalian Vektor dengan Skalar

Misalkan $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$,

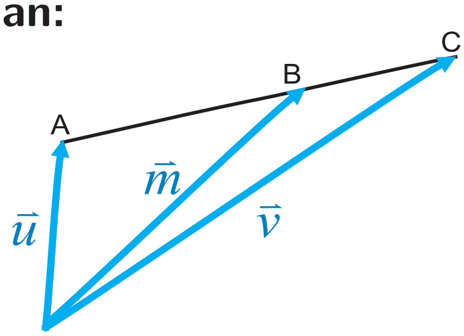
$-\vec{u} = \langle -u_1, -u_2, -u_3 \rangle$

$2\vec{u} = \langle 2u_1, 2u_2, 2u_3 \rangle$

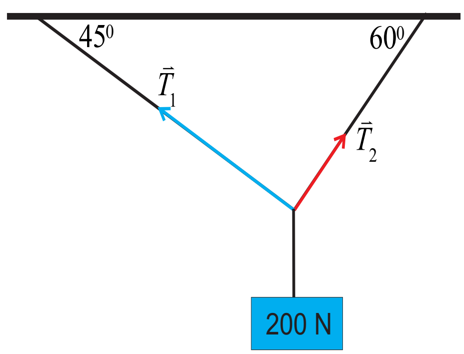
$\frac{1}{2}\vec{u} = \langle \frac{1}{2}u_1, \frac{1}{2}u_2, \frac{1}{2}u_3 \rangle$



Latihan:

1. 

Diketahui $\overline{\mathrm{AB}} = \frac{2}{3}\overline{\mathrm{AC}}$. Nyatakan vektor $\vec{m}$ dalam $\vec{u}$ dan $\vec{v}$

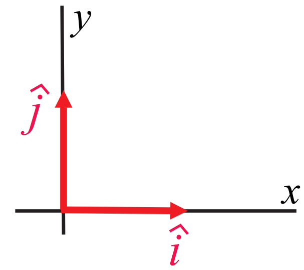
2. 

Sebuah benda digantung seperti pada gambar. Tentukan besarnya gaya tegangan tali T_1 dan T_2

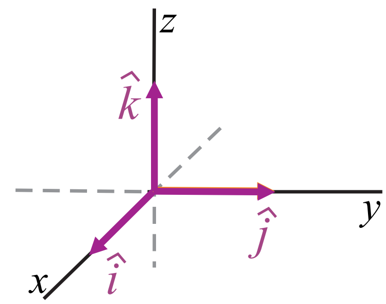
Sifat-sifat : Misalkan $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tiga buah vektor dan $a, b \in \mathbb{R}$, maka:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (komutatif)
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w})$ (asosiatif)
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ dengan $\vec{0} = \langle 0, 0 \rangle$
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
5. $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u} = \vec{u}(ab)$
6. $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
7. $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
8. $1\,\vec{u} = \vec{u}$

Vektor Basis



Vektor basis adalah sekumpulan vektor-vektor khusus, di mana vektor-vektor yang lain dapat dinyatakan sebagai *kombinasi linear* dari vektor-vektor tersebut.



Vektor-vektor basis di bidang:

$\widehat{i} = \langle 1, 0 \rangle$, dan $\widehat{j} = \langle 0, 1 \rangle$

Vektor-vektor basis di ruang:

$\widehat{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $\widehat{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$, dan $\widehat{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$

Misalkan $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, maka dengan menggunakan vektor-vektor basis kita dapat menuliskannya sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \vec{u} =& \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \\ &= u_1 \langle 1, 0, 0 \rangle + u_2 \langle 0, 1, , 0 \rangle + u_3 \langle 0, 0, 1 \rangle \\ &= u_1 \widehat{i} + u_2 \widehat{j} + u_3 \widehat{k} \end{aligned}$$

Hasil kali titik/dalam:

Hasil kali titik antara dua buah vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ didefinisikan sebagai berikut:

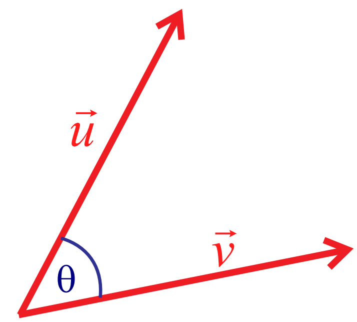
di $\mathbb{R}^2$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \langle u_1, u_2 \rangle \cdot \langle v_1, v_2 \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$

di $\mathbb{R}^3$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \cdot \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

Hasil kali titik antara dua buah vektor adalah sebuah skalar. Konsep ini banyak digunakan dalam bidang mekanika dan grafik 3 dimenasi.

Berikut ini disajikan sifat-sifat penting dari hasil kali titik,

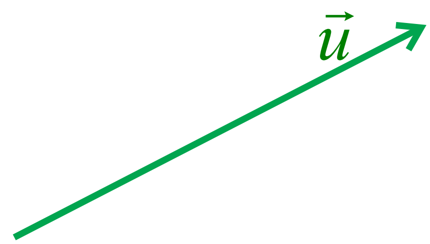
Sifat[2]: Misalkan $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tiga buah vektor dan $c \in \mathbb{R}$, maka:



1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (komutatif)
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ distributif
3. $c(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (c\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (c\vec{v})$
4. $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0.$
5. $\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||^2$
6. $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}|| \cos(\theta)$, θ sudut antara $\vec{u}$ dan $\vec{v}$.
7. $\vec{u} \perp \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

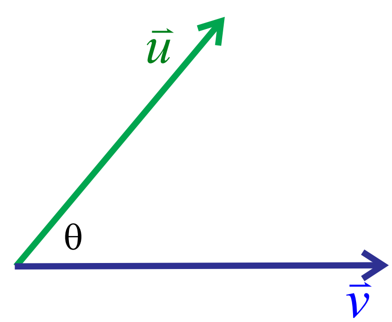
Vektor Satuan

Vektor satuan dari sebuah vektor $\vec{u}$ adalah vektor yang panjangnya satu dan searah dengan vektor $\vec{u}$. Pada gambar di samping, $\vec{s}$ adalah vektor satuan dari $\vec{u}$, dan $\vec{s} = \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$



Vektor Proyeksi

Vektor $\vec{u}$ diproyeksikan pada $\vec{v}$ dan hasilnya adalah vektor $\vec{w}$.
Akan ditentukan $\vec{w}$ dalam $\vec{u}$ dan $\vec{v}$.



$||\vec{w}|| = ||\vec{u}|| \cos\theta = ||\vec{u}|| \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}|| \, ||\vec{v}||}$

$\vec{w} = ||\vec{w}|| \times$ vektor satuan dari $\vec{v}$.

$= ||\vec{w}|| \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$.

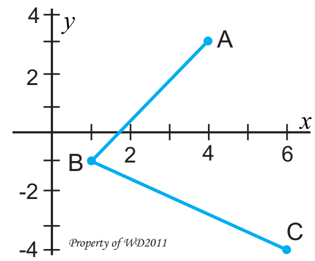
$= ||\vec{u}|| \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}|| \, ||\vec{v}||} \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{v}|| \, ||\vec{v}||} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{v}||^2} \vec{v}$

Proyeksi vektor $\vec{u}$ pada vektor $\vec{v}$ adalah vektor $\vec{w} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{v}||^2} \vec{v}$

Latihan:

1. Tentukan b supaya $\langle 8, 6\rangle$ dan $\langle 3, b\rangle$ saling tegak lurus. ♠

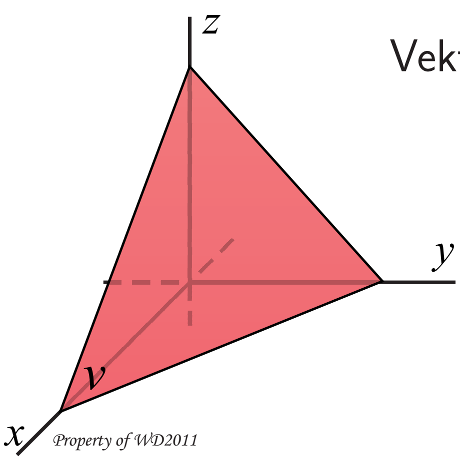
2. Bila $A = (4, 3)$, $B = (1, -1)$ dan $C = (6, -4)$, gunakan konsep vektor untuk menentukan sudut ABC. ♠



3. Cari vektor proyeksi $\vec{u} = \langle -1, 5\rangle$ pada $\vec{v} = \langle 3, 3\rangle$ ●

4. Cari vektor proyeksi $\vec{u} = \langle 4, 5, 3\rangle$ pada $\vec{v} = \langle 2, 2, -6\rangle$ ●

Persamaan Bidang di Ruang



Perhatikan bidang v (warna merah).

Titik $P = (x_0, y_0, z_0)$ terletak pada bidang v.

Vektor $\vec{n} = \langle A, B, C\rangle$ tegak lurus terhadap bidang v.

Akan ditentukan persamaan bidang v.

Misalkan $Q = (x, y, z)$ sebarang titik pada bidang v.

Bentuk vektor $\overrightarrow{PQ} = \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle$

Jelas $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{n}$

$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle \cdot \langle A, B, C\rangle = 0$

Persamaan bidang v : $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Latihan:

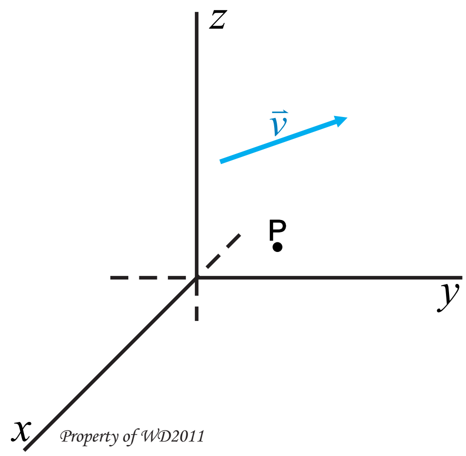
1. Misalkan $P = (1, 2, 3)$ dan $Q = (4, 4, -2)$. Tentukan persamaan bidang yang melalui titik P dan tegak lurus terhadap vektor $\overrightarrow{PQ}$. ♠

2. Tentukan sudut antara bidang $3x - 4y + 7z = 5$ dan bidang $2x + 4y + 3z = 8$. ●

3. Buktikan jarak dari titik (x_0, y_0, z_0) ke bidang $Ax + By + Cz = D$ adalah $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. ●

Persamaan Garis di Ruang

Diberikan titik $P = (x_0, y_0, z_0)$ dan vektor $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$



Akan ditentukan persamaan garis yang melalui titik P dan sejajar dengan vektor $\vec{v}$.

Misalkan $Q = (x, y, z)$ sebarang titik pada garis tersebut.

Jelas $\vec{v}$ sejajar dengan $\overrightarrow{PQ}$.

Jadi $\overrightarrow{PQ} = t\,\vec{v}$, dengan $t \in \mathbb{R}$.

$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = t\,\langle a, b, c \rangle$.

Persamaan parameter garis di ruang:

$$\begin{cases} x - x_0 = t\,a \\ y - y_0 = t\,b \\ z - z_0 = t\,c \end{cases}$$ disebut Persamaan Parameter dari garis di ruang.

Bila parameter t dieliminasi diperoleh persamaan sebagai berikut:

$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ disebut Persamaan Simetrik dari garis di ruang.

Latihan:

1. Cari persamaan simetrik dari garis yang melalui titik $(2, 5, -1)$ dan sejajar vektor $\langle 4, -3, 2 \rangle$. ♠
2. Cari persaman garis yang merupakan perpotongan antara bidang[2] $2x - y - 5z = -14$ dan $4x + 5y + 4z = 28$. ●

Hasil Kali Silang (Cross Product)

Hasil kali silang hanya didefinisikan pada vektor di $\mathbb{R}^3$. Misalkan $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ dan $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ dua buah vektor. Hasil kali silang dari $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ didefinisikan sebagai:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2\, v_3 - u_3\, v_2)\hat{i} - (u_1\, v_3 - u_3\, v_1)\hat{j} + (u_1\, v_2 - u_2\, v_1)\hat{k}$$

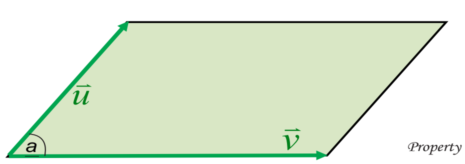
Sifat-Sifat: Misalkan $\vec{u}, \vec{v}$ tiga buah vektor maka:

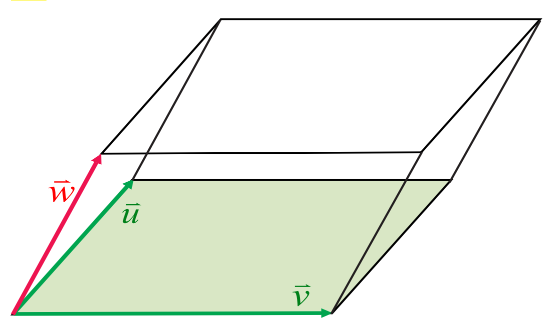
1. $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$ dan $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$, akibatnya

   $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ dan $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$
2. $\vec{u}$, $\vec{v}$, dan $(\vec{u} \times \vec{v})$ membentuk "right handed triple"
3. $||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\,\sin\theta$, dengan θ sudut antara $\vec{u}$ dan $\vec{v}$.

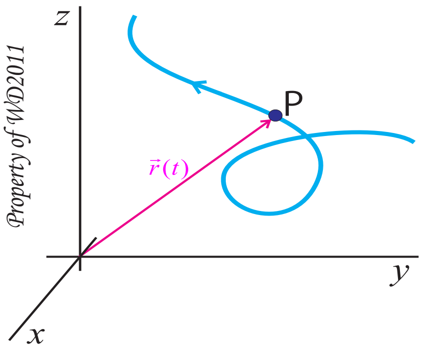
Latihan:

1. Cari persamaan bidang yang melalui tiga titik $(1, -2, 3)$, $(4, 1, -2)$, dan $(-2, -3, 0)$.
2. Periksa, apakah hasil kali silang bersifat komutatif, yaitu $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$.
3. Tunjukkan, secara geometri, $||\vec{u} \times \vec{v}||$ adalah luas jajaran genjang seperti pada gambar di sebelah kiri bawah.
4. Tunjukkan, secara geometri, $|\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|$ adalah volume "parallelepiped" seperti pada gambar di sebelah kanan bawah.





Fungsi Bernilai Vektor dan Gerak Sepanjang Kurva



Perhatikan sebuah titik P yang bergerak di ruang dengan lintasan seperti pada gambar di samping kiri. Posisi titik P pada saat t dinyatakan oleh vektor yang berpangkal di titik asal dan ujungnya di titik P. Posisinya tersebut dapat ditulis sebagai $\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$. Vektor $\vec{r}$ merupakan fungsi dengan variabel real t dan nilainya adalah sebuah vektor. Fungsi demikian disebut fungsi bernilai vektor.

Secara umum, fungsi bernilai vektor adalah sebagai berikut::

$$\vec{F}(t) = f(t)\,\widehat{i} + g(t)\,\widehat{j} = \langle f(t), g(t)\rangle \quad \text{dengan } t \in \mathbb{R}$$

atau

$$\vec{F}(t) = f(t)\,\widehat{i} + g(t)\,\widehat{j} + h(t)\,\widehat{k} = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle \quad \text{dengan } t \in \mathbb{R}$$

Untuk selanjutnya hanya akan dibicarakan fungsi bernilai vektor di ruang. Untuk fungsi bernilai vektor di bidang aturannya sama saja, hanya komponennya dua buah.

Kalkulus Fungsi Bernilai Vektor

Pengertian konsep limit untuk fungsi bernilai vektor "sama" dengan konsep limit di fungsi real biasa. Untuk perhitungannya berlaku sifat berikut:

Misalkan $\vec{F}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$, maka $\lim\limits_{t\to c} \vec{F}(t) = \langle \lim\limits_{t\to c} f(t), \lim\limits_{t\to c} g(t), \lim\limits_{t\to c} h(t)\rangle$

Turunan dan Integral fungsi bernilai vektor juga mewarisi sifat-sifat di fungsi real sbb:

Misalkan $\vec{F}(t) = \langle f(t), g(t)\rangle$, maka

a. $\vec{F}'(t) = \langle f'(t), g'(t)\rangle$

b. $\int \vec{F}(t)\,dt = \langle \int f(t)\,dt\,,\ \int g(t)\,dt\rangle$

Sifat² Operasi Aljabar Fungsi Bernilai Vektor:

Misalkan $\vec{F}(t)$, $\vec{G}(t)$ fungsi bernilai vektor, $h(t)$ fungsi real dan $c \in \mathbb{R}$, maka:

1. $D_t[\vec{F}(t) + \vec{G}(t)] = \vec{F}'(t) + \vec{G}'(t)$
2. $D_t[c\,\vec{F}(t)] = c\,\vec{F}'(t)$
3. $D_t[h(t)\,\vec{F}(t)] = h(t)\,\vec{F}'(t) + h'(t)\vec{F}(t)$
4. $D_t[\vec{F}(t)\,\vec{G}(t)] = \vec{F}'(t)\,\vec{G}(t) + \vec{F}(t)\,\vec{G}'(t)$
5. $D_t[\vec{F}(h(t))] = \vec{F}'(h(t))\,h'(t)$

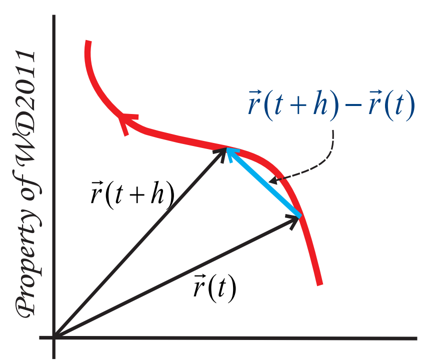
Contoh: Diberikan $\vec{F}(t) = (t^2 + t)\,\widehat{i} + e^t\,\widehat{j}$.

a. Tentukan $\vec{F}'(t)$ dan $\vec{F}''(t)$ dan sudut antara $\vec{F}'(0)$ dan $\vec{F}''(0)$.

b. Tentukan $D_t[t^3\vec{F}(t)]$ dan $\int_0^1 \vec{F}(t)\,dt$

Perhatikan sebuah titik P yang bergerak di bidang/ruang dengan posisi setiap saat $\vec{r}(t)$. Dari hukum Fisika, kecepatan $\vec{v}$ dan percepatannya $\vec{a}$ adalah: $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$, dan $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t)$

Arah dari vektor kecepatan $\vec{v}$ dapat dikaji dari definisi turunan r', yaitu $\vec{v}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)}{h}$. Dengan demikian arah $\vec{v}$ sama dengan arah garis singgung terhadap $\vec{r}(t)$.



Latihan:

1. Sebuah titik P bergerak sepanjang lingkaran berjari-jari r dengan laju ω rad/detik. Bila kedudukan awalnya di $(1, 0)$, tentukan kecepatan dan percepatannya pada saat $t = 0,5$ dan gambarkan.
2. Sebuah titik P bergerak dengan posisi setiap saat $(x, y) = (3\cos t, 2\sin t)$.
   a. Gambarkan grafik lintasan P dan arahnya.
   b. Tentukan kecepatan, laju dan percepatannya.

c. Tentukan saat kapan lajunya maksimum dan berapa nilainya.

d. Tunjukkan vektor percepatannya selalu menuju titik asal.

3. Diberikan sebuah kurva di ruang dengan persamaan $\vec{r}(t) = \langle t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3} \rangle$. Carilah persamaan garis singgungnya pada saat $t = 2$.

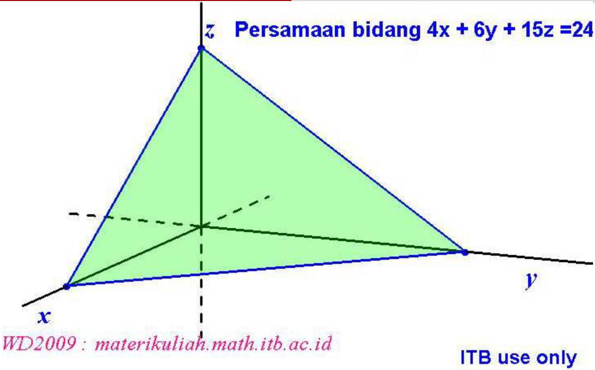
Permukaan Standard di Ruang

Warsoma Djohan

Prodi Matematika, FMIPA - ITB

January 22, 2016

Bidang 1



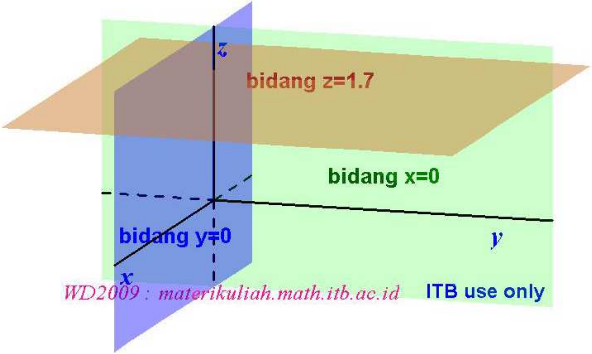
Menggambar bidang $4x + 6y + 15z = 24$

Perpotongan dengan sumbu-sumbu koordinat: $(6, 0, 0), (0, 4, 0), (0, 0, 1.6)$.

Hubungkan ketiga titik tersebut dengan garis lurus

Warnai bidang tersebut ■

Bidang 2



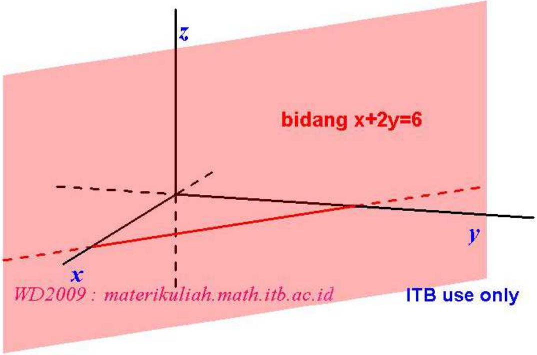
Menggambar bidang yang sejajar dengan bidang koordinat

bidang $x = 0$, disebut juga bidang *yoz*

bidang $y = 0$, disebut juga bidang *xoz*

bidang $z = 1.7$. Bidang ini sejajar dengan bidang *xoy*. ∎

Bidang 3

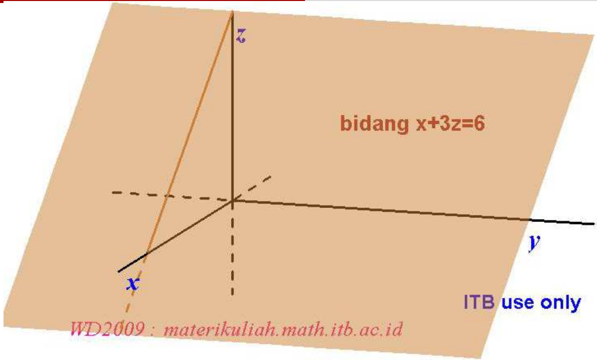


Menggambar bidang $x+2y=6$

Gambarkan garis $x+2y=6$ pada bidang xoy

Nilai varibel z bebas, jadi tinggal ditarik sejajar sumbu z. ■

Bidang 4



Menggambar bidang $x + 3z = 6$

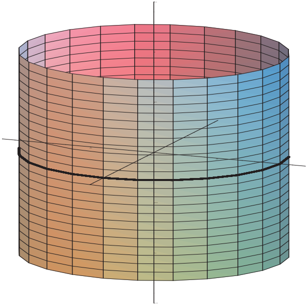
Gambarkan garis $x + 3z = 6$ pada bidang xoz

Nilai varibel y bebas, jadi tinggal ditarik sejajar sumbu y. ■

Silinder

Silinder adalah permukaan di ruang yang dibangun oleh sebuah persamaan (tak linear) yang melibatkan dua buah variabel, sedangkan variabel ketiga bebas.

Contoh: (a) $x^2 + y^2 = 9$ (b) $x^2 + 4y^2 = 10$ (c) $y = x^3$

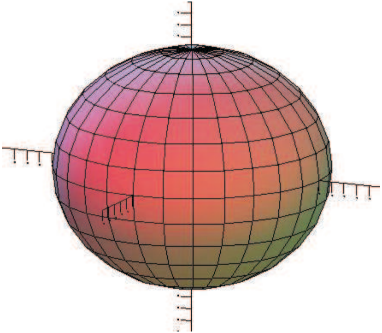


Menggambar silinder $x^2 + y^2 = 9$.

Irisan dengan bidang XOY : $x^2 + y^2 = 9$.

Nilai Variabel z bebas.

Animation 1 Animation 2 ■



Bola

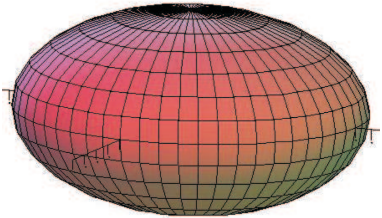
Bentuk umum: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Irisan dengan bidang XOY : $x^2 + y^2 = r^2$.

Irisan dengan bidang XOZ : $x^2 + z^2 = r^2$.

Irisan dengan bidang YOZ : $y^2 + z^2 = r^2$.

Animation ■



Elipsoida

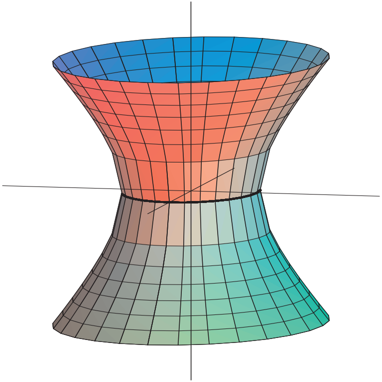
Bentuk umum: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2$.

Irisan dengan bidang XOY : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$.

Irisan dengan bidang XOZ : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2$.

Irisan dengan bidang YOZ : $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2$.

Animation ■



Hiperboloida Berdaun Satu

Bentuk umum: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$

Irisan dengan bidang XOY : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

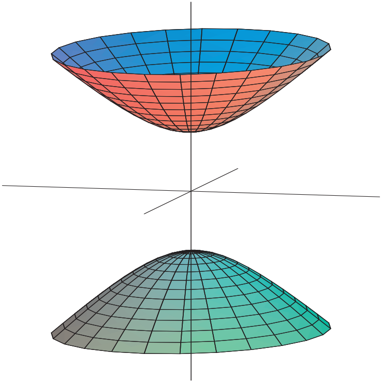
Irisan dengan bidang $z = k$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{k^2}{c^2} = 1. \Longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}.$$

Irisan dengan bidang YOZ : $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \Longleftrightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$

Irisan dengan bidang XOZ : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Animation 1 Animation 2 ■



Hiperboloida Berdaun Dua

Bentuk umum: $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

Untuk $x = 0$ dan $y = 0$, $z = \pm c.$

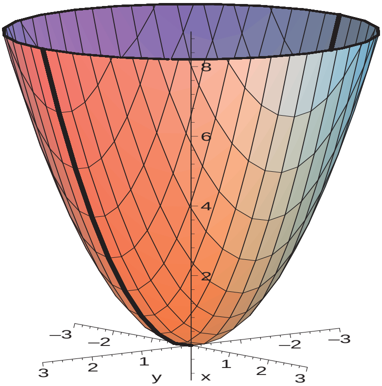
Irisan dengan bidang $z = k, \quad k > c:$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{k^2}{c^2} = 1. \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1.$$

Irisan dengan bidang YOZ : $-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

Irisan dengan bidang XOZ : $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

Animation 1 Animation 2 ■



Paraboloida

Bentuk umum: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Untuk $x = 0$ dan $y = 0$, $z = 0$.

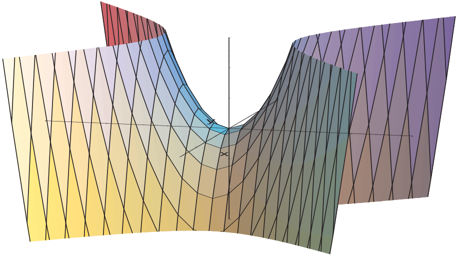
Irisan dengan bidang $z = k$, $k > 0$:

$$k = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \Longleftrightarrow \frac{x^2}{k\,a^2} + \frac{y^2}{k\,b^2} = 1.$$

Irisan dengan bidang YOZ : $z = \frac{y^2}{b^2}$.

Irisan dengan bidang XOZ : $z = \frac{x^2}{a^2}$.

Animation 1 Animation 2 ■



Paraboloida-Hiperboloida

Bentuk umum: $z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Irisan dengan bidang XOY

$0 = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \iff y = \pm \frac{b}{a} x$

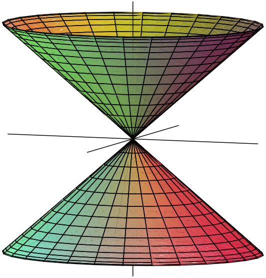
Irisan dengan bidang yoz: $z = \frac{y^2}{b^2}$.

Irisan dengan bidang xoz: $z = -\frac{x^2}{a^2}$.

Irisan dengan bidang z=k, k>0: $k = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Irisan dengan bidang z=k, k<0: $k = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Animation ■



Kerucut-Elips

Bentuk umum: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$

Irisan dengan bidang xoy : titik (0,0,0).

Irisan dengan bidang xoz : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \Longleftrightarrow z = \pm\frac{a}{c}x$

Irisan dengan bidang yoz : $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \Longleftrightarrow z = \pm\frac{b}{c}y$

Irisan dengan bidang z=k: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{k^2}{c^2} = 0 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2}$

Animation 1 Animation 2 ■

Kalkulus Fungsi Dua Peubah atau Lebih

Warsoma Djohan

Prodi Matematika, FMIPA - ITB

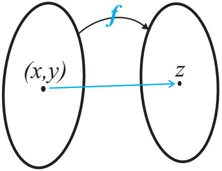
January 22, 2016

Fungsi Dua Peubah

Fungsi real dengan dua peubah real adalah fungsi yang memadankan pasangan terurut $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ dengan sebuah bilangan $z \in \mathbb{R}$.

Notasi: $z = f(x,y)$.
x dan y disebut peubah/variabel bebas.
z disebut peubah/variabel tak bebas.

Contoh: $f(x,y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{x^2+(y-1)^2}$



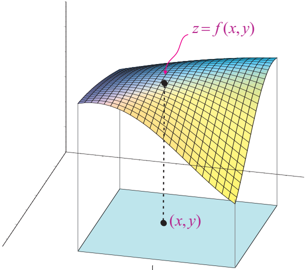
$f : (x,y) \longmapsto z$

Daerah definisi/Domain dari fungsi f, dinotasikan D_f, adalah kumpulan semua pasangan (x,y) sehingga $f(x,y)$ terdefinisi/punya nilai.

Daerah Nilai/Range dari fungsi f, $R_f = \{z \in \mathbb{R} | z = f(x,y), (x,y) \in D_f\}$.

Latihan: Tentukan daerah definisi dari contoh di atas lalu gambarkan. ♠

Grafik fungsi dua peubah $z = f(x,y)$ merupakan suatu permukaan di ruang (lihat gambar di samping).

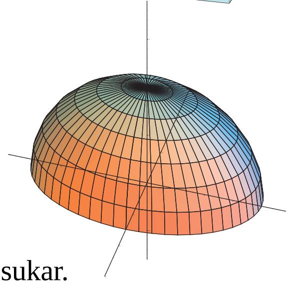


Dari pembahasan gambar-gambar permukaan standard di ruang yang lalu, tentukanlah mana yang merupakan fungsi dan mana yang bukan.

Contoh: Gambarkan grafik $z = \frac{1}{3}\sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

Kuadratkan ke dua ruas, maka diperoleh bentuk

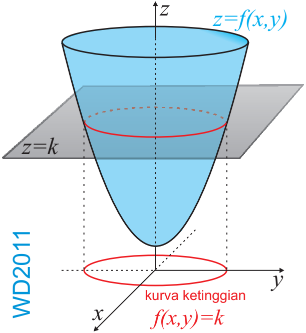
$$9x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36 \quad z \geq 0$$



Persaman terakhir adalah persamaan elipsoida.

Secara umum menggambar fungsi dua peubah cukup sukar.
Cara lain yang lebih mudah untuk menggambarkan fungsi dua peubah adalah dengan membuat **kontur/kurva ketinggiannya**.

Kurva Ketinggian /Peta Kontur



Diberikan sebuah permukaan $z = f(x, y)$.

Iriskan permukaan tersebut dengan bidang $z = k$

Hasil irisannya berupa sebuah kurva di ruang.

Proyeksikan kurva tersebut pada bidang *xoy*

Hasil proyeksi ini disebut kurva ketinggian dari $z = f(x, y)$ dengan ketinggian k

Kurva ketinggian dari sebuah fungsi dua peubah $z = f(x, y)$ adalah kumpulan titik-titik pada bidang *xoy* yang mempunyai nilai fungsi / ketinggian sama.

Gambar beberapa kurva ketinggian dengan berbagai k disebut **peta kontur**.

Contoh: Gambarkan peta kontur dari $z = \frac{1}{3}\sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$ ♠

Diskusi:

- Mungkinkah dua buah kontur dengan k berbeda, berpotongan ?
- Mungkinkah dua buah kontur yang tidak berpotongan mempunyai nilai k yang sama ?

Latihan: Gambarkan peta kontur dari: (a) $z = xy$ ♠ (b) $z = y^2 - x^2$.

Fungsi Tiga Peubah

Fungsi real dengan tiga peubah adalah fungsi yang memadankan pasangan terurut (x,y,z) dengan satu bilangan real u dan dinotasikan: $u = f(x,y,z)$.

Contoh: (a) $u = f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ (b) $v = g(x,y,z) = \sqrt{x} + y^2$
(c) Temperatur setiap titik dalam suatu ruang $T(x,y,z) = z - x^2 - y^2$.

Grafik fungsi tiga peubah sudah tidak mungkin digambarkan, mengapa?

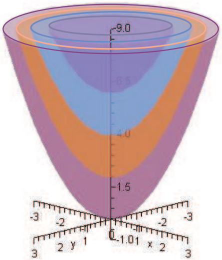
Peta konturnya dapat kita gambar dan berbentuk permukaan $f(x,y,z) = k$.

Contoh: Gambarkan peta kontur dari $T(x,y,z) = z - x^2 - y^2$.

Persamaan kurva ketinggiannya: $z - x^2 - y^2 = k$

$$z = x^2 + y^2 + k$$

Peta kontur berupa kumpulan paraboloida.



Turunan Parsial

Turunan parsial dari fungsi dua peubah bertujuan untuk menghitung gradien/tanjakan/laju perubahan ketinggian dari kurva yang merupakan perpotongan permukaan $z = f(x,y)$ dengan bidang yang sejajar dengan bidang xoz atau bidang yoz.

Untuk itu dikenal ada dua macam turunan parsial, yaitu:

a. Turunan parsial terhadap variabel x ♠

b. Turunan parsial terhadap variabel y ♠

Cara menentukan turunan parsial sebuah fungsi dua peubah sama saja dengan cara menentukan turunan fungsi satu peubah. Untuk jelasnya ikutilah contoh berikut ini.

Contoh:
Tentukan semua turunan parsial pertama dari $f(x,y) = x^2y^3 + e^{x^2y}$. ♠

Turunan Parsial Kedua

Turunan parsial pertama dari fungsi dua peubah $z = f(x,y)$ akan menghasilkan dua buah fungsi baru $f_x(x,y)$ dan $f_y(x,y)$. Bila kedua fungsi ini diturunkan lagi terhadap variabel x dan y, hasilnya disebut turunan parsial kedua.

Berikut disajikan notasi dan definisi turunan parsial kedua.

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_x(x+\Delta x, y) - f_x(x,y)}{\Delta x}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x(x, y+\Delta y) - f_x(x,y)}{\Delta y}$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_x(x+\Delta x, y) - f_x(x,y)}{\Delta x}$$

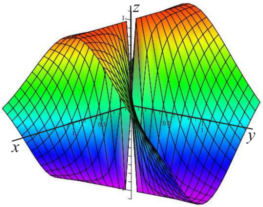
$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_y(y, y+\Delta y) - f_y(x,y)}{\Delta y}$$

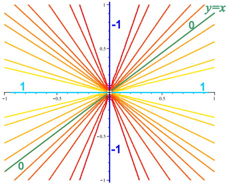
Latihan: Tentukan semua turunan parsial kedua dari $f(x,y) = x^2 y^3 + e^{x^2 y}$. ♠

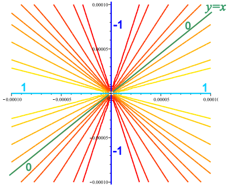
Limit Fungsi 2 Peubah

Misalkan $z = f(x,y)$ fungsi dua peubah dan $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Kita akan mengamati *kecendrungan* nilai $f(x,y)$ bila (x,y) *mendekati* titik (a,b).

Perhatikan grafik dan peta kontur dari $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ berikut ini:







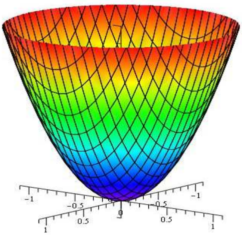
Perbesaran gambar 2, 10.000 kali

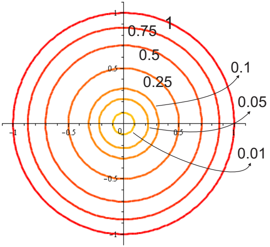
Bila $(x,y) \to (0,0)$ sepanjang sumbu x, nilai $f(x,y) \to 1$

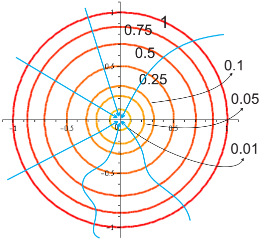
Bila $(x,y) \to (0,0)$ sepanjang sumbu y, $f(x,y) \to -1$

Bila $(x,y) \to (0,0)$ sepanjang garis $y = x$, $f(x,y) \to 0$

Perhatikan grafik dan peta kontur dari $f(x,y) = x^2 + y^2$ berikut ini:





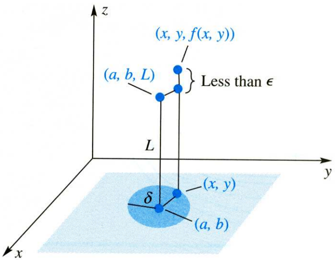


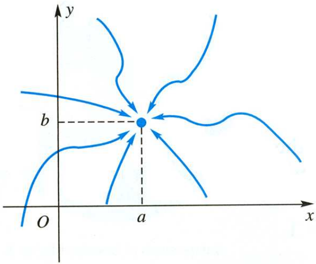
Perhatikan peta kontur paling kanan.
(bila kurang jelas, perbesarlah tampilannya).

Kurva biru menunjukkan jalur-jalur yang semuanya menuju titik asal.

Pada tiap jalur, amatilah kecendrungan nilai $f(x,y)$ bila $(x,y) \to (0,0)$.

Apakah tiap jalur memberikan kecendrungan nilai $f(x,y)$ yang sama ?





Limit dari fungsi dua peubah $f(x,y)$ untuk (x,y) mendekati (a,b) disebut L, ditulis $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$, selalu dapat dicari $\delta > 0$ sehingga $0 < |(x,y)-(a,b)| < \delta \Rightarrow |f(x,y)-L| < \varepsilon$.

Catatan: $|(x,y)-(a,b)| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$

Fungsi f tidak perlu terdefinisi pada titik (a,b).

Nilai limit $f(x,y)$ tidak boleh bergantung pada arah (x,y) mendekati (a,b). (Pada fungsi dua peubah tidak ada konsep limit kiri atau limit kanan).

Soal-soal Latihan Limit Fungsi Dua Peubah

1. Periksa $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x-y}$
2. Periksa $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3-x^2-xy}{x^2+y^2}$
3. Periksa $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^4-y^4}$
4. Periksa $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$
5. Periksa $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

Kekontinuan Fungsi Dua Peubah

Definisi: Fungsi dua peubah $z = f(x,y)$ disebut kontinu di titik (a,b) bila memenuhi $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

Sifat-sifat:

- Misalkan $f(x,y)$ dan $g(x,y)$ kontinu di (a,b) maka $f+g$, $f-g$, fg, dan f/g kontinu di (a,b).
- Polinom dua peubah, $p(x,y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + \cdots$ kontinu di $\mathbb{R}^2$
- fungsi rasional dua peubah kontinu di seluruh daerah definisinya.
- **Fungsi komposisi**. Misalkan $g(x,y)$ kontinu di (a,b) dan $f(x)$ kontinu di $g(a,b)$, maka $(f \circ g)(x,y) = f(g(x,y))$ kontinu di (a,b).

Contoh: Jelaskan kekontinuan fungsi $f(x,y) = \cos(x^3 - 4xy + y^2)$

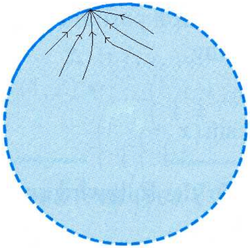
Jawab: Nyatakan $f(x,y) = (g \circ h)(x,y)$ dengan $h(x,y) = x^3 - 4xy + y^2$ dan $g(x) = \cos x$.

Fungsi h kontinu di sebarang titik $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, dan fungsi g kontinu diseluruh $\mathbb{R}$, maka fungsi f kontinu di setiap titik pada $\mathbb{R}^2$.

Kekontinuan Fungsi Dua Peubah di Himpunan

Fungsi dua peubah $z = f(x,y)$ disebut kontinu di $S \subset \mathbb{R}^2$ bila f kontinu pada setiap titik pada S.

Bila S memiliki ”batas”, maka proses limit hanya dilakukan sepanjang jalur yang berada dalam S saja.



Sifat: Misalkan $f(x,y)$ fungsi dua peubah.
Bila f_{xy} dan f_{yx} kontinu pada *himpunan buka* S, maka $f_{xy} = f_{yx}$.

Diferensial Fungsi Dua Peubah

Pemahaman diferensial fungsi dua peubah memerlukan kajian teoritis yang agak mendalam. Untuk keperluan kuliah ini, pembahasan hanya akan dilakukan secara garis besarnya saja.

Definisi: Fungsi dua peubah $z = f(x,y)$ dikatakan *locally linear* di $P(a,b)$ bila $f(a+h_1, b+h_2) = f(P) + h_1 f_x(P) + h_2 f_y(P) + h_1\,\varepsilon_1(h_1,h_2) + h_2\,\varepsilon_2(h_1,h_2)$ dengan $\varepsilon_1(h_1,h_2) \to 0$ dan $\varepsilon_2(h_1,h_2) \to 0$ bila $(h_1,h_2) \to (0,0)$

Secara geometri, definisi di atas menggambarkan bahwa *di sekitar* titik P permukaan $x = f(x,y)$ dapat kita hampiri dengan sebuah bidang datar. Berikut disajikan visualisasi dari konsep tersebut: ♠ ♠

Fungsi $z = f(x,y)$ disebut terdiferensialkan di titik $P(a,b)$, bila fungsi tersebut bersifat *Locally linear* di P.

Dengan notasi vektor, fungsi yang terdiferensialkan di P dapat ditulis sebagai:

$f(\vec{P}+\vec{h}) = f(\vec{P}) + \nabla f(\vec{P})\cdot\vec{h} + \vec{\varepsilon}(\vec{h})\cdot\vec{h}$, dengan $\vec{h} = <h_1, h_2>$, $\vec{\varepsilon} = <\varepsilon_1, \varepsilon_2>$,

dan $\nabla f(\vec{P}) = <f_x(\vec{P}), f_y(\vec{P})>$ disebut gradien dari f di titik P.

Vektor gradien $\nabla f(x,y)$ mempunyai sifat-sifat seperti pada turunan fungsi satu peubah:

- $\nabla[f(\vec{p}) + g(\vec{p})] = \nabla f(\vec{p}) + \nabla g(\vec{p})$
- $\nabla[\alpha f(\vec{p})] = \alpha\, \nabla f(\vec{p})$
- $\nabla[f(\vec{p})\, g(\vec{p})] = \nabla f(\vec{p})\, g(\vec{p}) + f(\vec{p})\, \nabla g(\vec{p})$

Sifat: Bila $f_x(x,y)$ dan $f_y(x,y)$ kontinu di *lingkungan* sekitar (a,b) maka $f(x,y)$ terdiferensialkan di (a,b).

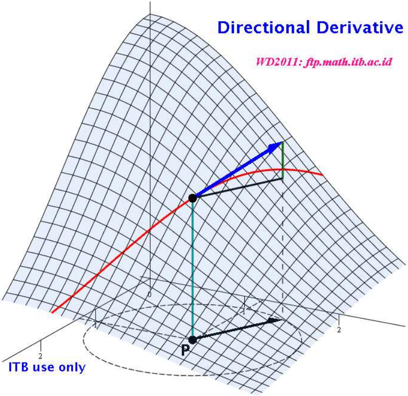
Contoh: Tunjukkan $f(x,y) = xe^y + x^2y$ terdiferensialkan di mana-mana.

Sifat: Jika fungsi $f(x,y)$ terdiferensial di P maka $f(x,y)$ kontinu di P.

Turunan Berarah

Konsep turunan berarah bertujuan untuk mengetahui laju perubahan nilai fungsi dua peubah/lebih di suatu titik pada arah tertentu.

Animasi turunan berarah ♠. Contoh pada masalah sehari-hari ♠.



Perhatikan permukaan $z = f(x,y)$

$P(a,b)$ titik pada daerah definisi f

$\vec{u}$ vektor satuan yang berpangkal di P

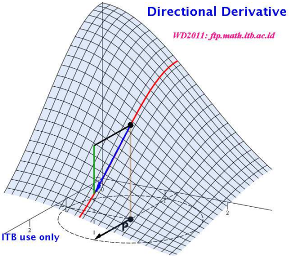
Iriskan permukaan tersebut dengan bidang tegak yang melalui P dan searah dengan $\vec{u}$. Hasilnya berupa sebuah kurva.

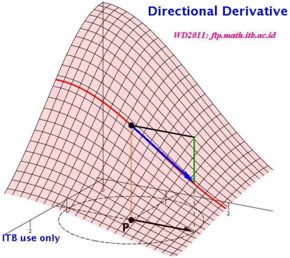
Buat garis singgung di titik $(a,b,f(a,b))$.

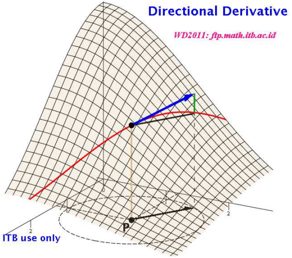
Akan dihitung gradien/tanjakan dari garis singgung tersebut.

Turunan berarah dari $z = f(x,y)$ di titik $P(a,b)$ pada arah vektor satuan $\vec{u}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = D_{\vec{u}} f(P) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{P} + h\vec{u}) - f(\vec{P})}{h} \qquad \text{dengan } \vec{P} = <a,b>$$







$\vec{u} = \ <0,1>$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P)$$

$\vec{u} = \ <1,0>$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P)$$

$\vec{u} = \ <u_1,u_2>$

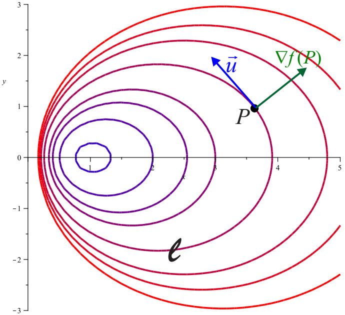
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = \cdots\cdots$$

Teorema: Misalkan $z = f(x,y)$ terdiferensial di sekitar titik P, dan $\vec{u}$ vektor arah satuan maka $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = \nabla F(P) \cdot \vec{u}}$

Soal-soal latihan:

1. Misalkan $f(x,y) = 4x^2 - xy + 3y^2$, tentukan $D_u f$ di titik $(2,-1)$
(a.) pada arah $\vec{a} = \langle 4,3 \rangle$ (b.) pada arah menuju titik $(5,3)$.
2. Misalkan $z = f(x,y)$, pada arah manakah $D_{\vec{u}} f(\vec{p})$ maksimum?
3. Diberikan temperatur sebuah keping pada setiap titik (x,y) adalah $T(x,y) = 4x^2 - xy + 3y^2$. Seekor kutu berada di posisi $(1,2)$. Pada arah manakah dia harus bergerak agar mengalami penurunan temperatur terbesar.
4. Alief sedang berada pada lereng gunung Bromo. Bila Dia bergerak ke utara, laju perubahan ketinggiannya adalah 0,7 meter/detik, sedangkan bila bergerak ke arah barat laju perubahan ketinggiannya 0,5 meter/detik. Tentukan laju perubahan ketinggian gunung bila dia bergerak ke arah timur laut. *Petunjuk: gambarkan arah mata angin dengan arah timur dan utara masing-masing menggambarkan sumbu x positif dan y positif*

Turunan Berarah vs Vektor Gradien:



Perhatikan kurva ketinggian dengan level ℓ dari fungsi $z = f(x,y)$.

Titik $P(a,b)$ berada pada kurva tersebut.

$\vec{u}$ vektor singgung satuan satuan di titik P.

Nilai $D_{\vec{u}}f(P) = 0$, mengapa ?

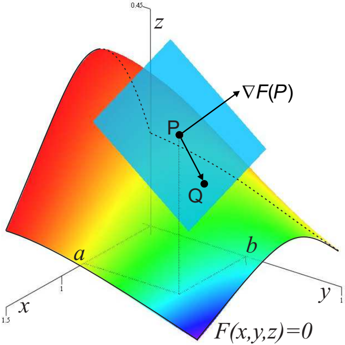
Dilain pihak $D_{\vec{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

Jadi $\nabla f(P) \cdot \vec{u} = 0$

Kesimpulan: $\nabla f(P)$ tegak lurus terhadap lengkungan ℓ

Perluasan konsep: Misalkan $F(x,y,z) = k$ sebuah permukaan dan P sebarang titik di permukaan tersebut, maka $\nabla F = < F_x(P), F_y(P), F_z(P) >$ tegak lurus permukaan di titik P. Bukti ♠.

Latihan: Diberikan fungsi $z = \frac{x^2}{4} + y^2$. Tentukan vektor gradien di titik $(2,1)$, lalu gambarkan kurva ketinggian beserta vektor gradiennya.



Bidang Singgung

Perhatikan grafik permukaan $F(x,y,z) = 0$

$P(a,b,c)$ titik pada permukaan tersebut.

Dibuat bidang singgung yang melalui titik P.

Bagaimana menentukan persamaan bidang singgung tersebut?

$\nabla F(P)$ tegak lurus permukaan $F(x,y,z) = 0$.

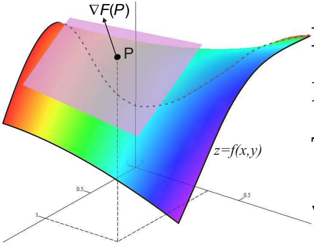
Jadi $\nabla F(P)$ adalah vektor normal dari bidang singgung.

Tetapkan sebarang titik $Q(x,y,z)$ pada bidang singgung tersebut.

Jelas $\nabla F(P)$ tegak lurus $\overrightarrow{PQ}$.

Jadi $\nabla F(P)\cdot < x-a, y-b, z-c >= 0$.

$$< \frac{\partial F}{\partial x}(P), \frac{\partial F}{\partial y}(P), \frac{\partial F}{\partial z}(P) > \cdot < x-a, y-b, z-c >= 0 \qquad \blacksquare$$



Bidang singgung pada permukaan $z = f(x, y)$

Misalkan $P(a, b, c)$ titik pada permukaan.

Tulis $z = f(x, y)$ sebagai $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$.

$$\nabla F = < \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 >$$

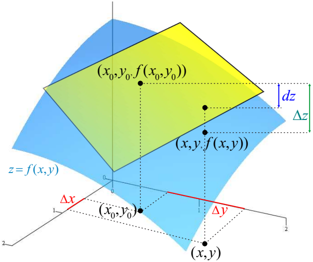
Persamaan bidang: $< \frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P), -1 > \cdot < x - a, y - b, z - c > = 0$

Soal-soal latihan:

1. Tentukan persamaan bidang singgung terhadap $x^2 + y^2 + 2z^2 = 23$ di titik $(1, 2, 3)$.
2. Tentukan persamaan bidang singgung terhadap $z = x^2 + y^2$ di titik $(1, 1, 2)$.
3. Tentukan persamaan bidang singgung yang sejajar dengan bidang xoy terhadap $z = x^2 - 2xy - y^2 - 8x + 4y$.

Diferensial Total dan Aproksimasi

Sebelum membahas konsep aproksimasi, amatilah visualisasi berikut: ♠



Diberikan fungsi dua peubah $z = f(x,y)$.

Titik (x_0, y_0) dan (x,y) di domain f.

Diferensial dari **peubah bebas** x dan y,

$$dx = \Delta x = x - x_0$$

$$dy = \Delta y = y - y_0$$

Pada **peubah tak bebas** z, nilai Δz dan dz tidak sama.

$\Delta z = f(x,y) - f(x_0, y_0)$, perbedaan nilai fungsi pada permukaaan $z = f(x,y)$.

Persamaan bidang singgung: $z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$.

Pada gambar di atas $z - f(x_0, y_0)$ adalah segmen dz, jelaskan?

$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$ disebut diferensial total dari fungsi f.

Misalkan f terdiferensialkan di lingkungan yang memuat (x_0, y_0) dan (x, y).

Bila $|(x,y) - (x_0, y_0)| \to 0$ maka $|\Delta z - dz| \to 0$, mengapa?

Jadi untuk keperluan aproksimasi, digunakan hubungan

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \Delta z \approx dz = f_x(x_0,y_0)\,dx + f_y(x_0,y_0)\,dy.$$

Latihan:

1. Misalkan $z = 2x^3 + xy - y^3$. Tentukan Δz dan dz bila (x,y) berubah dari $(2,1)$ ke $(2,03;\, 0,98)$.
2. Gunakan hampiran diferensial total untuk menghitung $\sqrt{3{,}9 \cdot 9{,}1}$.

Aturan Rantai

Aturan ini berfungsi untuk menentukan turunan dari sebuah fungsi komposisi.

Berdasarkan jenis fungsi komposisinya, dikenal 2 jenis aturan rantai.

Aturan Rantai jenis 1

Diberikan fungsi $z = f(x,y)$ dengan $x = x(t)$ dan $y = y(t)$.

Perhatikan bahwa terhadap peubah t, f merupakan fungsi satu peubah.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Latihan:

1. Misalkan $z = x^3 y$ dengan $x = 2t$ dan $y = t^2$. Tntukan $\frac{dz}{dt}$.
2. Sebuah silinder jari-jari alasnya $r = 10$ cm dan tingginya $h = 100$ cm. Silinder tersebut dipanaskan sehingga memuai dengan laju pertambahan jari-jarinya 0,2 cm/jam dan laju pertambahan tingginya 0,5 cm/jam. Tentukan laju pertambahan volumenya setiap saat.

Penurunan Fungsi Implisit Memakai Aturan Rantai jenis 1

Diberikan fungsi satu peubah dalam bentuk imlisit $F(x,y)=0$.

Pada persamaan di atas tersirat $x=x$ dan $y=y(x)$.

Turunkan $F(x,y)=0$ terhadap x memakai aturan rantai jenis 1.

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

Dengan mengingat $\frac{dx}{dx}=1$, diperoleh

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

Dari persamaan terakhir, $\frac{dy}{dx}$ dapat ditentukan.

Latihan: Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $x^3+x^2y-10y^4=0$

Aturan Rantai jenis 2

Diberikan fungsi $z = f(x,y)$ dengan $x = x(s,t)$ dan $y = y(s,t)$.

Perhatikan bahwa terhadap peubah (s,t), f merupakan fungsi dua peubah.

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Latihan: Misalkan $z = x^3 y$ dengan $x = 2s + 7t$ dan $y = 5st$.

Tentukan $\frac{\partial z}{\partial s}$ dan $\frac{\partial z}{\partial t}$.

Penurunan Fungsi Implisit Memakai Aturan Rantai jenis 2

Diberikan fungsi dua peubah dalam bentuk imlisit $F(x,y,z) = 0$.

Pada persamaan di atas tersirat $x = x$, $y = y$, dan $z = f(x,y)$.

Turunkan $F(x,y,z) = 0$ terhadap x dan y memakai aturan rantai jenis 2.

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

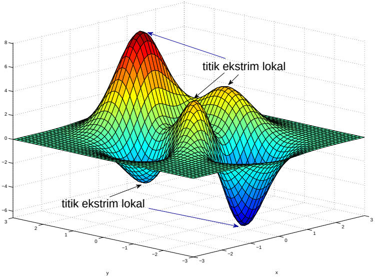
Dengan mengingat $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$ dan $\frac{\partial y}{\partial y} = 1$, diperoleh

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dy} = 0$$

Dari persamaan terakhir, $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dapat ditentukan.

Latihan: Tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dari $x^3 e^{y+z} - y\sin(x-z) = 0$

Maksimum dan Minimum Fungsi Dua Peubah



Perhatikan grafik permukaan $z = f(x, y)$

f dikatakan mencapai maksimum di p_0 bila $f(p_0) \geq f(p)\ \forall\, p \in D_f$.
$f(p_0)$ disebut nilai maksimum.

f dikatakan mencapai *minimum* di p_0 bila $f(p_0) \leq f(p)\ \forall\, p \in D_f$.
$f(p_0)$ disebut nilai minimum.

f dikatakan mencapai maksimum lokal di p_0 bila $f(p_0) \geq f(p)$ untuk semua titik p *di sekitar* p_0. $f(p_0)$ disebut nilai maksimum lokal.

f dikatakan mencapai minimum lokal di p_0 bila $f(p_0) \leq f(p)$ untuk semua titik p *di sekitar* p_0. $f(p_0)$ disebut nilai minimum lokal

Untuk selanjutnya titik maksimum/minimum disebut titik ekstrim.

Titik ekstrim tidak selalu ada (berikan contoh).

Bila daerah definisi dari $f(x,y)$ berupa **himpunan tertutup** dan **terbatas**, maka titik ekstrim dijamin ada.

(*Teorema titik kritis*). Titik ekstrim selalu merupakan salah satu dari:

a. Titik stasioner, yaitu titik yang memenuhi hubungan $\nabla F = 0$

b. Titik singular, yaitu titik yang turunannya tidak ada

c. Titik *batas* dari D_f

Contoh: Tentukan titik ekstrim lokal dari $f(x,y) = x^2 - 2x + \frac{y^2}{4}$.

$f_x(x,y) = 2x - 2$ dan $f_y(x,y) = \frac{y}{2}$. Titik stasioner $(1,0)$ dan $f(1,0) = -1$

Titik singular dan titik batas tidak ada.

$f(x,y) = x^2 - 2x + \frac{y^2}{4} = x^2 - 2x + 1 + \frac{y^2}{4} - 1 = (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} - 1 \geq -1$

Jadi $(1,0)$ merupakan titik minimum, dan tidak ada titik maksimum.

Teorema Pengujian titik ekstrim lokal

Misalkan $f(x,y)$ mempunyai turunan parsial kedua yang kontinu disekitar titik stasioner $p_0(x_0,y_0)$. Tetapkan $D = f_{xx}(p_0)f_{yy}(p_0) - f_{xy}^2(p_0)$, maka

a. Jika $D > 0$ dan $f_{xx}(p_0) < 0$, maka p_0 titik maksimum lokal.
b. Jika $D > 0$ dan $f_{xx}(p_0) > 0$, maka p_0 titik minimum lokal.
c. Jika $D < 0$, maka p_0 titik pelana (bukan titik ekstrim).
d. Jika $D = 0$, tidak ada kesimpulan.

Latihan:

1. Tentukan titik ekstrim lokal / titik pelana dari $z = \frac{-x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.
2. Tentukan titik pada $z^2 = x^2y + 4$ yang jaraknya paling dekat ke titik asal.
3. Tentukan titik ekstrim dari $f(x,y) = 2 + x^2 + y^2$ pada daerah $S = \{(x,y) : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$
   petunjuk: untuk mencari titik ekstrim pada batas S, gunakan substitusi $x = \cos t$ *dan* $y = 2\sin t$ *dengan* $0 \leq t \leq 2\pi$.

Ektrim Dengan Kendala.

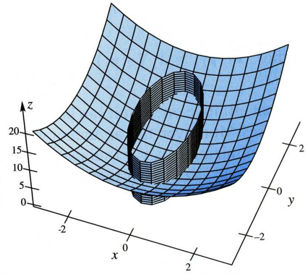
Diberikan fungsi dua peubah $z = f(x,y)$

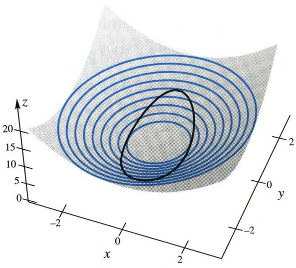
Akan dicari titik ekstrim dari f dengan kendala/syarat $g(x,y) = 0$.

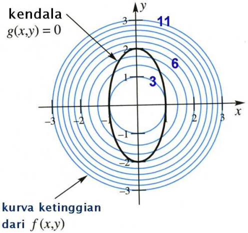
Ilustrasi:

Cari titik maksimum dari $f(x,y) = 2 + x^2 + y^2$ sepanjang $\underbrace{x^2 + \frac{y^2}{4} - 1}_{g(x,y)} = 0$

Berikut ditampilkan visualisasi dari masalah ini.



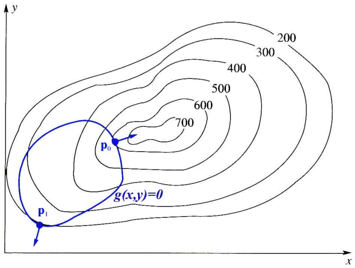




Metode Pelipat Lagrange.

Diberikan fungsi dua peubah $z = f(x,y)$ dengan kendala $g(x,y) = 0$.

Gambarkan kurva ketinggian dari f / bersama dengan kurva kendalanya.



Akan dicari titik ekstrim dari f dengan kendala titik tersebut berada pada kurva $g(x,y) = 0$

Pada gambar, titik tersebut adalah p_0 dan p_1.

Di titik ekstrim tersebut, kurva kendala $g(x,y) = 0$ akan **bersinggungan** dengan kurva ketinggian dari f, Mengapa?.

Dengan demikian, di titik ekstrim, $\nabla g(x,y)$ sejajar dengan $\nabla f(x,y)$, Mengapa?

Jadi untuk mencari titik ekstrim dari $z = f(x,y)$ dengan kendala $g(x,y) = 0$,

kita harus mencari pasangan titik (x,y) yang memenuhi hubungan:

$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ dengan λ konstanta, disebut pelipat Lagrange

Titik (x,y) yang memenuhi hubungan $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ disebut **titik kritis**

Diskusi:

- Bila terdapat n buah titik kritis, dengan n $>$ 1, bagaimana menetukan titik maksimum dan titik minimumnya?
- Bila hanya terdapat 1 buah titik krirtis, bagaimana menentukan jenisnya?

Latihan:

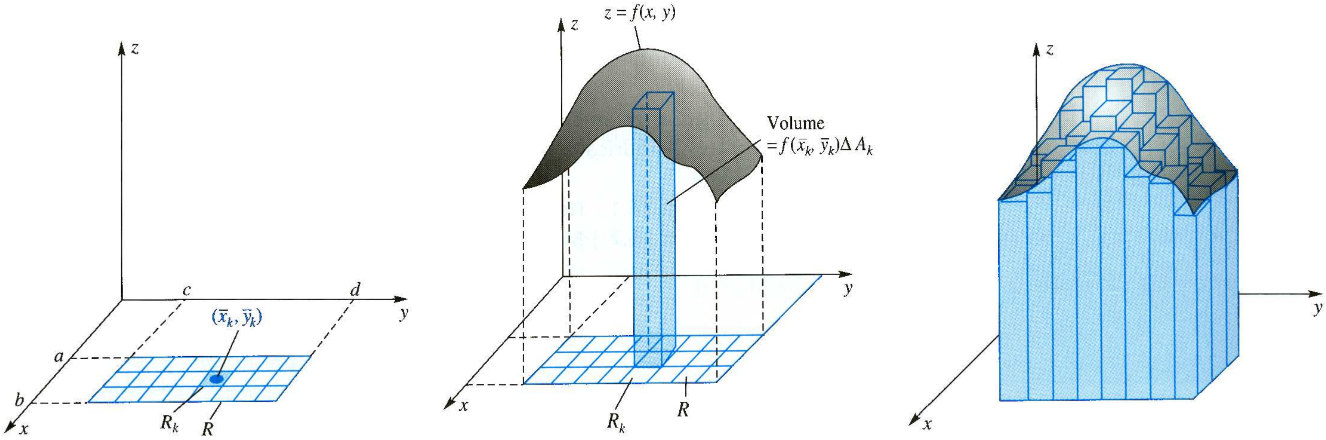
1. Carilah nilai maksimum dari $f(x,y) = 2 + x^2 + y^2$ sepanjang $g(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$.
2. Carilah titik-titik ekstrim dari $f(x,y) = y^2 - x^2$ pada elips $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.
3. Tentukan volume maksimum dari sebuah kotak yang dapat dibuat bila harga bahan alasnya tiga kali harga bahan sisi yang lain. Harga bahan alasnya Rp 6.000/m^2 dan jumlah uang yang tersedia Rp. 120.000. Catatan: $\nabla f(x,y,z) = \langle f_x, f_y, f_z \rangle$.
4. Tentukan titik ekstrim dari $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ pada elips yang merupakan perpotongan silinder $x^2 + y^2 = 2$ dengan bidang $y + z = 1$.

   Catatan: Masalah ini adalah masalah ekstrim dengan dua kendala yaitu $g(x,y,z) = 0$ dan $h(x,y,z) = 0$, rumus metode Lagrangenya adalah:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) + \mu \nabla h(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Integral Lipat Dua Atas Daerah Persegipanjang ♠ ♠

Perhatikan fungsi $z = f(x, y)$ pada $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b\,,\ c \leq y \leq d\}$



Partisikan daerah R atas n buah persegipanjang yang dibentuk dari garis-garis yang sejajar dengan sumbu-x dan sumbu-y seperti pada gambar di atas. Perseipanjang tersebut diberi indeks R_1, R_2, $\cdots$, R_n. Perhatikan persegipanjang ke k, yaitu R_k. Luasnya adalah $\Delta A_k = \Delta x_k \cdot \Delta y_k$. Selanjutnya pilih titik wakil $(\overline{x}_k, \overline{y}_k) \in R_k$. Perhatikan balok yang terbentuk dengan alas persegipanjang R_k dan tinggi $f(\overline{x}_k, \overline{y}_k)$. Volumenya adalah $f(\overline{x}_k, \overline{y}_k)\,\Delta A_k$ (gambar ke dua).

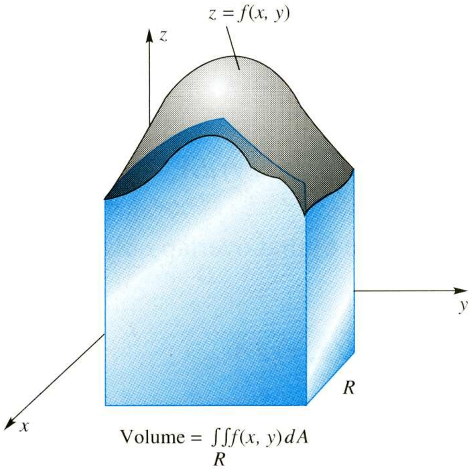
Jumlah Riemann dari fungsi $f(x, y)$ atas partisi P adalah:

$$J = \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k, \overline{y}_k)\,\Delta A_k$$

Misalkan $|P|$ adalah elemen partisi yang ukurannya paling besar. Integral lipat dua atas daerah R didefinisikan sebagai:

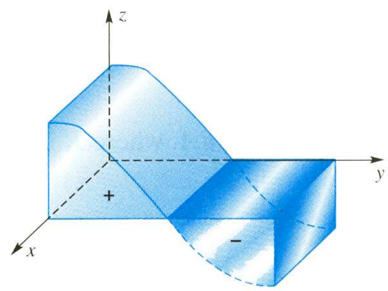
$$\iint_R f(x, y)\,dA = \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k, \overline{y}_k)\,\Delta A_k$$

Sifat (jaminan integral lipat dua ada):
Bila fungsi $f(x, y)$ terdefinisi pada *persegipanjang tertutup* R dan kontinu (kecuali mungkin di sebanyak berhingga titik) maka f terintegralkan.



Secara geometri, bila $f(x,y) \geq 0$, integral lipat dua menyatakan volume benda yang alasnya R dan atapnya permukaan $z = f(x,y)$.

Bila ada daerah R dengan $f(x,y) \leq 0$, integral lipat dua menyatakan volume benda pada daerah z positif dikurangi volume benda pada daerah z negatif (lihat gambar di samping).

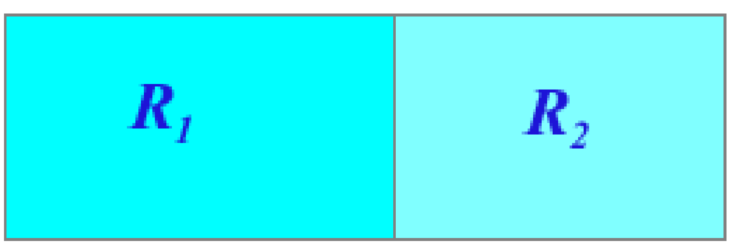


<u>Sifat</u>^{2}:

a. $\displaystyle\iint\limits_R k f(x,y)\,dA = k\iint\limits_R f(x,y)\,dA$

$$\iint\limits_R (f(x,y)+g(x,y))\,dA = \iint\limits_R f(x,y)\,dA + \iint\limits_R g(x,y)\,dA$$

b. Jika $R = R_1 \cup R_2$ maka $\displaystyle\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \iint\limits_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,dA$



c. Jika $f(x,y) \leq g(x,y)$ maka $\displaystyle\iint\limits_R f(x,y)\,dA \leq \iint\limits_R g(x,y)\,dA$

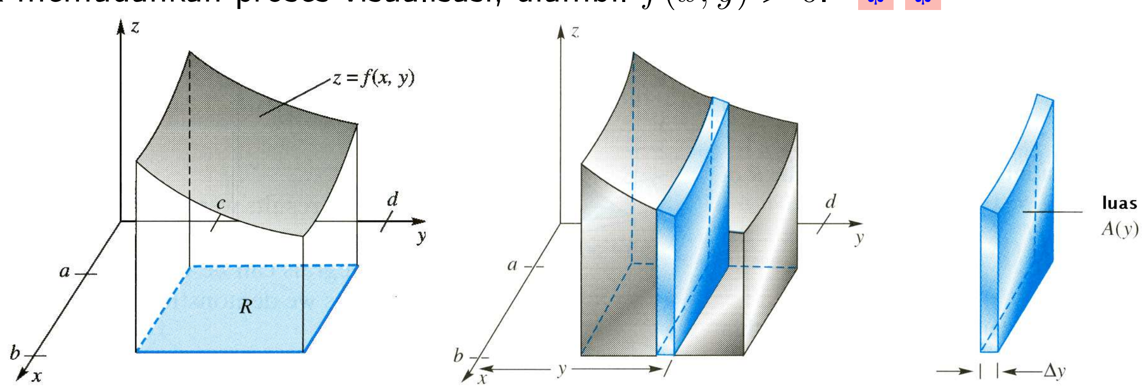
d. $\displaystyle\iint\limits_R 1\,dA = A_R$ dengan A_R adalah luas daerah R.

Latihan:

1. Misalkan $R = \{(x,y) : 0 \le x \le 3,\, 0 \le y \le 3\}$. Tentukan
$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA \quad \text{bila} \quad f(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 3,\, 0 \le y \le 1 \\ 2 & 0 \le x \le 3,\, 1 < y \le 2 \\ 3 & 0 \le x \le 3,\, 2 < y \le 3 \end{cases}$$
2. Misalkan $R = \{(x,y) : 0 \le x \le 4,\, 0 \le y \le 8\}$. Tentukan jumlah Riemann dari $\iint\limits_R \frac{64 - 8x + y^2}{16}\,dA$ dengan membagi R atas empat bagian yang sama dan titik wakilnya dipilih pusat dari masing-masing persegipanjang.

Perhitungan Integral Lipat Sebagai Integral Berulang

Pada pasal ini akan dibahas cara menghitung integral lipat dua atas daerah persegipanjang untuk fungsi sebarang. Perhatikan $f(x,y)$ atas daerah $R = \{(x,y) : a \le x \le b,\, c \le y \le d\}$. Pembahasan berikut berlaku untuk sebarang fungsi f, namun demikian untuk memudahkan proses visualisasi, diambil $f(x,y) > 0$. ♠ ♠



irisan dengan bidang y = konstanta volume irisan ≈ $A(y)\,\Delta y$

Irislah benda yang akan dihitung volumenya (gambar paling kiri) menjadi keping-keping tipis yang sejajar dengan bidang xz (gambar tengah). Misalkan lebar keping tersebut Δy. Luas permukaan keping tersebut hanya bergantung pada posisi y (jelaskan!), notasikan $A(y)$. Volume keping tipis tersebut adalah $\Delta V = A(y)\,\Delta y$.

Dengan demikian volume benda adalah $V = \int_c^d A(y)\,dy$

$A(y)$ adalah luas keping sejauh y dari bidang xz, $A(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$.

Dengan demikian volume benda adalah: $V = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy$

Bentuk hitungan terakhir disebut sebagai integral berulang.

Alternatif lain bila kita membuat irisan kepingnya sejajar dengan bidang yz maka rumus yang diperoleh adalah: $V = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx$

Hati-hati: Batas-batas integrasi harus sesuai dengan urutan perhitungan integral.

Contoh-contoh:

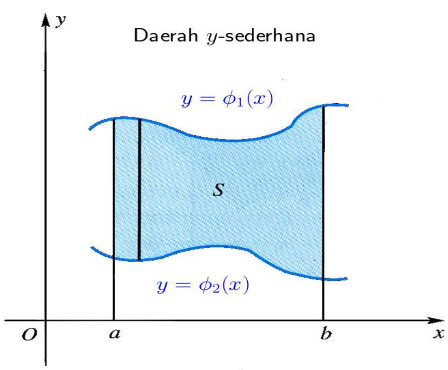
1. Hitung $\int_2^4 \left[\int_1^2 6x^2 y\,dx \right] dy$
2. Hitung soal no 1. dengan urutan pengintegralan yang berbeda.
3. Hitung volume benda dibawah permukaan $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2$ pada $R = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ dan di atas bidang $z = 1$.

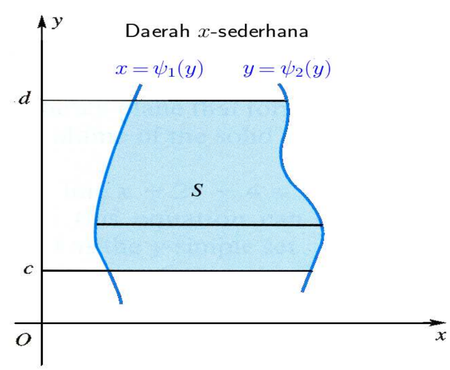
Integral Lipat Dua atas Daerah Sebarang

Perhitungan integral lipat atas daerah sebarang secara umum sulit dilakukan. Kita akan melihatnya pada dua jenis daerah berikut:

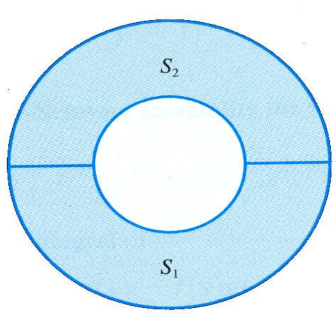
$S = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$ disebut daerah y-sederhana

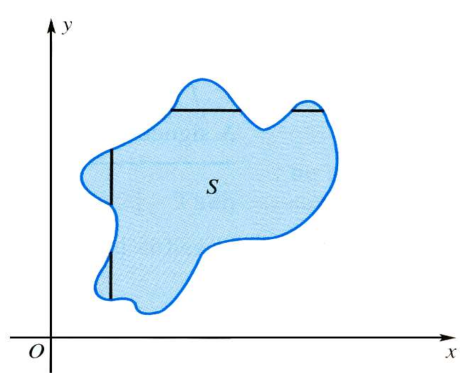
$S = \{(x,y) : \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y),\ c \leq y \leq d\}$ disebut daerah x-sederhana





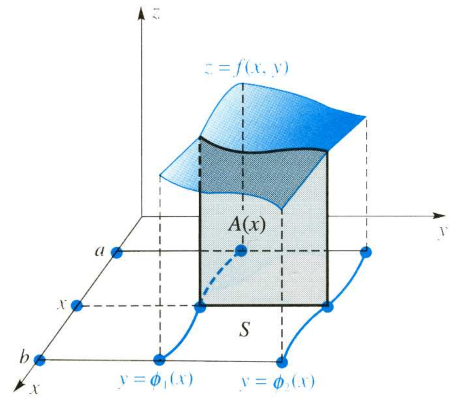
Jenis daerah lain yang tidak termasuk ke dalam dua tipe di atas pada umumnya dapat dipartisi menjadi beberapa bagian yang masing-masingnya berbentuk daerah x-sederhana atau y-sederhana.





Diskusi:

a. Adakah daerah yang sekaligus x-sederhana dan y-sederhana ?
b. Carilah daerah yang tidak dapat dipartisi jadi bagian-bagian daerah x-sederhana dan y-sederhana.



Untuk daerah y-sederhana, rumus integrasinya adalah sebagai berikut:

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$$

dengan argumentasi serupa, rumus untuk daerah x-sederhana:

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dx\right] dy$$

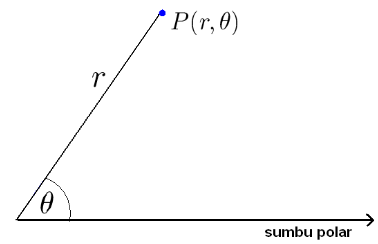
Contoh^2:

1. Hitung $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{y^2} 2ye^x\,dx\,dy$
2. Hitung volume benda pada oktan pertama yang terletak diantara paraboloida $z = x^2 + y^2$ dan silinder $x^2 + y^2 = 4$.
3. Hitung $\displaystyle\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^2 e^{x^2}\,dx\,dy$
   (petunjuk: gambar daerah integrasinya lalu ubah urutan integrasinya)

Integral Lipat Dua pada Koordinat Polar

Seringkali daerah integrasi dari integral lipat dua berbentuk sebuah busur. Daerah seperti ini lebih mudah direpresentasikan dalam bentuk koordinat polar ketimbang dalam koordinat kartesius.

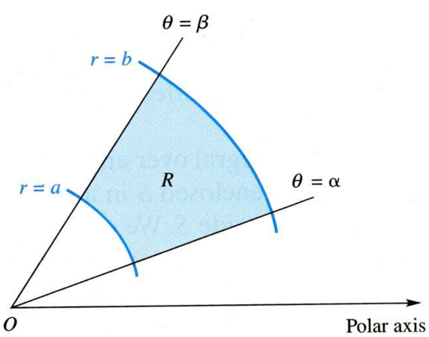
Perhatikan sistem koordinat polar seperti terlihat pada gambar di samping. Di sini sebuah titik pada bidang dinyatakan sebagai (r, θ) dengan r menyatakan jarak dari titik pusat koordinat dan θ adalah sudut yang dibentuk antara sumbu polar dengan garis yang menghubungkan pusat koordinat dan titik tersebut.

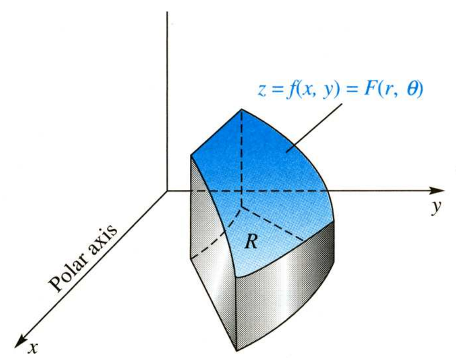


Hubungan titik di koordinat kartesius dan koordinat polar adalah:

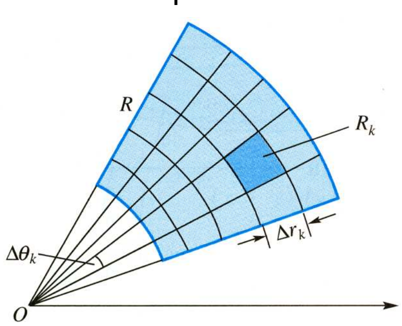
$$x = r\cos\theta \quad \text{dan} \quad y = r\sin\theta$$

Selanjutnya kita akan menurunkan rumus integral lipat dengan daerah definisi berupa persegi panjang polar.





Perhatikan sebuah persegi panjang polar $R = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b,\ \alpha \leq \theta \leq \beta\}$. Misalkan fungsi $z = f(x, y)$ terdefinisi pada daerah R. Dalam bentuk polar, fungsi tersebut dapat ditulis sebagai $z = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$



Perhatikan persegipanjang (pp) polar di samping. Partisikan pp tersebut atas n bagian. Selanjutnya perhatikan elemen partisi ke k. Ukuran elemen ini adalah Δr_k dan $\Delta\theta_k$. Pilih wakil $(\bar{r}_k, \bar{\theta}_k)$ dengan $\bar{r}_k$ titik tengah antara r_{k-1} dan r_k sedangkan θ_k sebarang. Luas elemen ini adalah $\Delta A_k = \bar{r}_k\, \Delta r_k\, \Delta\theta_k$ (buktikan !)

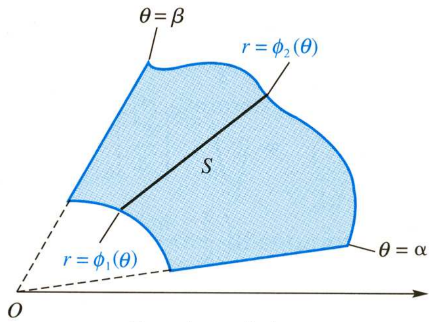
Bila $z = f(x, y) > 0$ maka volume benda di atas elemen tersebut adalah:

$$\Delta V = f(\bar{r}_k \cos\bar{\theta}_k, \bar{r}_k \sin\bar{\theta}_k)\, \bar{r}_k\, \Delta r_k\, \Delta\theta_k$$

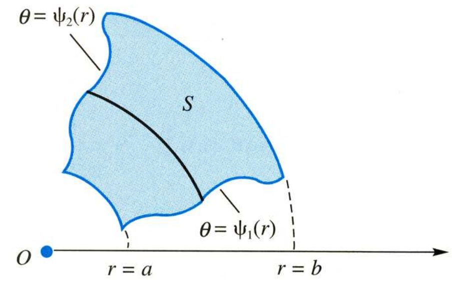
Dengan demikian, volume benda seluruhnya, $V = \displaystyle\iint\limits_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$.

Contoh: Tentukan volume benda di bawah permukaan $z = e^{x^2+y^2}$ dan di atas daerah $R = \{(r, \theta) : 1 \le r \le 3,\, 0 \le \theta \le \pi/4\}$

Integral Lipat atas daerah r-sederhana dan θ-sederhana



Daerah r-sederhana



Daerah θ-sederhana

Sebuah daerah S disebut daerah r-sederhana bila berbentuk

$$S = \{(r, \theta) : \phi_1(\theta) \le r \le \phi_2(\theta),\, \alpha \le \theta \le \beta\}$$

Integral lipat dua atas r-sederhana:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

Sebuah daerah S disebut daerah θ-sederhana bila berbentuk

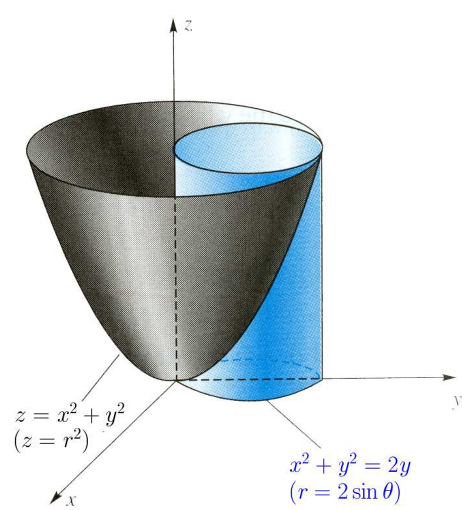
$$S = \{(r, \theta) : a \le r \le b,\, \psi_1(r) \le \theta \le \psi_2(r)\}$$

Integral lipat dua atas daerah θ-sederhana:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{\psi_1(r)}^{\psi_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, d\theta\, dr$$

Contoh-contoh:

1. Tentukan volume benda di bawah permukaan $x = x^2 + y^2$ di atas bidang xoy dan di dalam silinder $x^2 + y^2 = 2y$

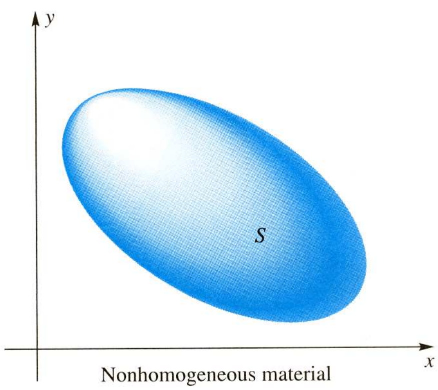


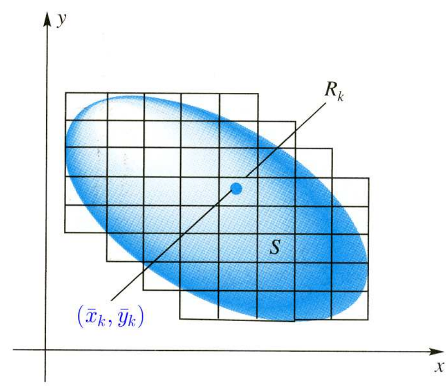
2. Gunakan koordinat polar untuk menghitung $\iint\limits_R e^{x^2+y^2}\,dA$ dengan $S = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 4\}$.

3. Ubahlah dalam koordinat kartesius, lalu hitunglah

$$\int_{3\pi/4}^{4\pi/3} \int_0^{-5\sec\theta} r^3 \sin^2\theta \, dr \, d\theta$$

Momen dan Pusat Massa





Perhatikan sebuah lamina (keping tipis 2 dimensi) tak homogen S (gambar sebelah kiri). Misalkan rapat masssanya adalah $\delta(x,y)$. Partisikan S atas pp-pp kecil seperti pada gambar sebelah kanan. Perhatikan elemen ke k. Pilih wakil $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$. Massa elemen ini adalah $\Delta m = \delta(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\, A_k$. Massa lamina:

$$m = \iint\limits_R \delta(x,y)\, dA$$

Sedangkan momen terhadap sumbu x dan sumbu y masing-masing:

$$M_x = \iint\limits_R y\delta(x,y)\, dA \qquad \text{dan} \qquad M_y = \iint\limits_R x\delta(x,y)\, dA$$

Pusat massa dari lamina: $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m})$

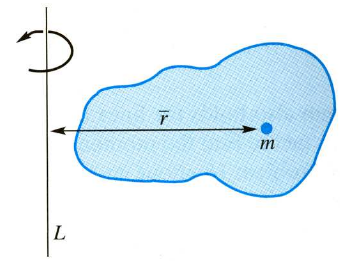
Contoh-contoh:

1. Sebuah lamina dengan rapat massa $\delta(x,y) = xy$ dibatasi oleh sumbu-x, garis $x = 8$ dan kurva $y = x^{\frac{2}{3}}$. Tentukan massa dan pusat massanya.
2. Sebuah lamina berbentuk seperempat linkaran berjari-jari a, rapat massanya sebanding dengan jaraknya dari pusat lingkaran tersebut. Tentukan pusat massanya.

Momen Inersia

Perhatikan sebuah benda (berbentuk titik) bermassa m dan berjarak sejauh r dari suatu garis. Momen inersia dari benda didefinisikan sebagai:

momen inersia : $I = mr^2$



Sekarang perhatikan sebuah lamina pada bidang xy. Misalkan rapat massanya $\delta(x,y)$. Momen inersia benda terhadap sumbu-x, sumbu-y dan pusat koordiant masing-masing:

$$I_x = \iint_R y^2 \delta(x,y)\, dA \quad , \quad I_y = \iint_R x^2 \delta(x,y)\, dA$$

dan

$$I_z = \iint_R (x^2 + y^2)\, \delta(x,y)\, dA = I_x + I_y$$

Contoh: Tentukan momen inersia terhadap sumbu-x, sumbu-y dan pusat koordinat dari dua contoh terakhir.

Jari-jari girasi didefinisiakan sebagai : $\bar{r} = \sqrt{\dfrac{I}{m}}$.

Persamaan Diferensial Linear Orde Dua

Warsoma Djohan

Prodi Matematika, FMIPA - ITB

January 22, 2016

Persamaan Diferensial (PD) Linear Orde Dua

Bentuk umum: $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = k(x)$

Akan ditinjau: $a_1(x)$ dan $a_2(x)$ berupa fungsi konstan: $y'' + a_1 y' + a_2 y = k(x)$

Bila **k(x)=0**, PD tersebut disebut PD linear orde 2 **homogen**.

Untuk mencari solusi PD linear orde 2 tak homogen, kita harus terlebih dahulu mecari solusi PD homogennya.

Teorema

Persamaan diferensial homogen orde dua selalu mempunyai dua buah solusi fundamental $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ yang ***saling bebas****. Solusi umum PD homogen berbentuk $y_h = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$ dengan c_1 dan c_2 konstanta sebarang.*

Solusi Persamaan Diferensial (PD) Linear Orde Dua Homogen

Bentuk umum: $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$

Misalkan solusinya $y = e^{rx}$ (r harus dicari)

$y' = r\,e^{rx}$ dan $y'' = r^2\,e^{rx}$.

Substitusikan y, y' dan y'' ke PD homogen,

$r^2 e^{rx} + a_1 r e^{rx} + a_2 e^{rx} = 0$

$\left(r^2 + a_1 r + a_2\right) e^{rx} = 0$

$r^2 + a_1 r + a_2 = 0$, **disebut persamaan karakteristik**

Persamaan karakteristik di atas menghasilkan dua buah akar, sebut r_1 dan r_2.

Solusi PD homogen bergantung pada jenis dari akar-akar tersebut.

Teorema

Misalkan r_1 dan r_2 akar-akar dari persamaan karakteristik PD homogen.

- *Bila r_1 dan r_2 bilangan* ***real yang berbeda*** *maka $y_h = c_1\, e^{r_1 x} + c_2\, e^{r_2 x}$.*
- *Bila $r_1 = r_2$ (**akar kembar**) maka $y_h = c_1\, e^{r_1 x} + c_2\, x\, e^{r_1 x}$.*
- *Bila r_1 dan r_2 bilangan* ***kompleks****, sebut $r_1 = \alpha + \beta\, i$, maka $y_h = c_1\, e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2\, e^{\alpha x}\sin(\beta x)$.*

Latihan: Tentukan solusi umum PD homogen berikut:

- $y'' - 2y' - y = 0$
- $y'' - 6y' + 9y = 0$
- $y'' - 4y' + 13y = 0$
- $y'' + y = 0$

Solusi Persamaan Diferensial (PD) Linear Orde Dua Tak Homogen

Perhatikan kembali: $y'' + a_1 y' + a_2 y = k(x)$ (*)

Teorema

Misalkan y_h solusi PD homogen dan y_p ***sebuah solusi PD tak homogen*** *(*), maka solusi umum PD tak homogen adalah $y = y_h + y_p$.*

Jadi untuk menyelesaikan PD tak homogen kita harus melakukan tahapan:

- Tentukan solusi PD homogen, y_h
- Cari sebuah solusi PD tak homogen, y_p
- Solusi umum adalah jumlah dari $y_h + y_p$

Ada dua metode mecari y_p: **Koefisien Tak Tentu** dan **Variasi Parameter**.

Catatan: y_p biasa dinamakan **solusi khusus / particular solution**

Metode Koefisien Tak Tentu / Metode Coba-Coba

Metode ini hanya dapat diterapkan bila $k(x)$ berbentuk fungsi eksponen, polinom, dan trigonometri dalam sin dan cos, atau kombinasi linear dari ketiga macam fungsi tersebut.

Solusi khusus y_p dicari melalui pemisalan mengikuti aturan pada tabel berikut:

	$k(x)$	pemisalan y_p
a.	$c\,e^{\alpha x}$	$t\,e^{\alpha x}$
b.	$c\cos(\alpha x)$	
	$d\sin(\alpha x)$	$s\cos(\alpha x) + t\sin(\alpha x)$
	$c\cos(\alpha x) + d\sin(\alpha x)$	
c.	$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$	$t_0 + t_1 x + \cdots + t_n x^n$

Pemisalan di atas hanya dapat digunakan bila $k(x)$ bukan merupakan solusi fundamental! Jika $k(x)$ sama dengan solusi fundamental, pemisalannya harus dikali x atau x^2 (akan dijelaskan melalui soal latihan).

Latihan: Tentukan solusi umum persamaan diferensial berikut

1. $y'' - 3y' - 4y = 4x^2 + 2$
2. $y'' + 2y' = 4x^2 + 2$
3. $y'' + 4y = \sin(2x)$
4. $y'' - 3y' - 4y = 3e^{-x} + 4x^2 + 2$

Metode Variasi Parameter

Perhatikan kembali: $y'' + a_1 y' + a_2 y = k(x)$ (*)

Metode variasi parameter dapat diterapkan pada semua bentuk fungsi $k(x)$.

Misalkan $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ solusi fundamental (*).

Solusi khusus dimisalkan $y_p = v_1(x)\,u_1(x) + v_2(x)\,u_2(x)$ (v_1 dan v_2 dicari)

Substitusikan y_p, y_p', dan y_p'', maka akan diperoleh hubungan

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_1 v_1' + u_2 v_2' & = & 0 \\ u_1' v_1' + u_2' v_2' & = & k(x) \end{array}\right. , \quad \text{Solusinya, } v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_2 \\ k(x) & u_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}}$$

v_2' dapat diperoleh dengan mesubstitusikan v_1' pada persamaan pertama.

Latihan: Cari solusi umum PD $y'' + y = \sec x$.

15.3 Applications of Second-Order Equations

Many problems in physics lead to second-order linear differential equations. We first consider the problem of a vibrating spring under various assumptions. Then we return to and generalize an earlier application to electric circuits.

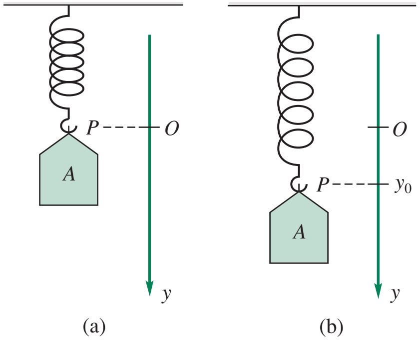


Figure 1

Pasal 15.3 ini disadur dari Buku: Varberg, Purcell & Rigdon, Calculus, 9th ed.

A Vibrating Spring (Simple Harmonic Motion) Consider a coiled spring weighted by an object A and hanging vertically from a support, as in Figure 1a. We wish to consider the motion of the point P if the spring is pulled y_0 units below its equilibrium position (Figure 1b) and given an initial velocity of v_0. We assume friction to be negligible.

According to Hooke's Law, the force F tending to restore P to its equilibrium position at $y = 0$ satisfies $F = -ky$, where k is a constant depending on the characteristics of the spring and y is the y-coordinate of P. But by Newton's Second Law, $F = ma = (w/g)a$, where w is the weight of the object A, a is the acceleration of P, and g is the constant acceleration due to gravity ($g = 32$ feet per second per second). Thus,

$$\frac{w}{g}\frac{d^2y}{dt^2} = -ky. \qquad k > 0$$

is the differential equation of the motion. The solution y must satisfy the initial conditions $y(0) = y_0$ and $y'(0) = v_0$, where y_0 and v_0 are the initial position and initial velocity, respectively.

If we let $B^2 = kg/w = k/m$, then this equation takes the form

$$\frac{d^2y}{dt^2} + B^2y = 0$$

and has the general solution

$$y = C_1 \cos Bt + C_2 \sin Bt$$

The conditions $y = y_0$ and $y' = v_0$ at $t = 0$ determine the constants C_1 and C_2. If the object is released with an initial velocity of 0, then $C_1 = y_0$ and $C_2 = 0$. Thus,

$$y = y_0 \cos Bt$$

We say that the spring is executing **simple harmonic motion** with amplitude y_0 and period $2\pi/B$ (Figure 2).

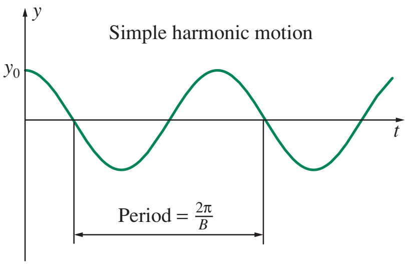


Figure 2

EXAMPLE 1 When an object weighing 5 pounds is attached to the lowest point P of a spring that hangs vertically, the spring is extended 6 inches. The 5-pound weight is replaced by a 20-pound weight, and the system is allowed to come to equilibrium. If the 20-pound weight is now pulled downward another 2 feet and then released, describe the motion of the lowest point P of the spring.

SOLUTION The first sentence of the example allows us to determine the spring constant. By Hooke's Law, $|F| = ks$, where s is the amount in feet that the spring is stretched, and so $5 = k(\frac{1}{2})$, or $k = 10$. Now put the origin at the equilibrium point after the 20-pound weight has been attached. From the derivation just before the example, we know that $y = y_0 \cos Bt$. In the present case, $y_0 = 2$ and $B^2 = kg/w = (10)(32)/20 = 16$. We conclude that

$$y = 2\cos 4t$$

The motion of P is simple harmonic motion, with period $\frac{1}{2}\pi$ and amplitude 2 feet. That is, P oscillates up and down from 2 feet below 0 to 2 feet above 0 and then back to 2 feet below 0 every $\frac{1}{2}\pi \approx 1.57$ seconds. ■

Damped Vibrations So far we have assumed a simplified situation, in which there is no friction either within the spring or resulting from the resistance of the air. We can take friction into account by assuming a retarding force that is proportional to the velocity dy/dt. The differential equation describing the motion then takes the form

$$\frac{w}{g}\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - q\frac{dy}{dt}. \qquad k > 0, q > 0$$

By letting $E = qg/w$ and $B^2 = kg/w$, this equation can be written as

$$\frac{d^2y}{dt^2} + E\frac{dy}{dt} + B^2y = 0$$

an equation for which the methods of Section 15.1 apply. The auxiliary equation for this second-order linear differential equation is $r^2 + Er + B^2 = 0$, so the roots are

$$\frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4B^2}}{2}$$

We must consider the cases where $E^2 - 4B^2$ is negative, zero, and positive.

Case 1: $E^2 - 4B^2 < 0$ In this case, the roots are complex:

$$r = -\frac{E}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4B^2 - E^2} = -\alpha \pm \beta i$$

Notice that α and β will both be positive. The general solution of the differential equation is thus

$$y = e^{-\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$$

which can be written in the form (see Problem 15)

$$y = Ae^{-\alpha t} \sin(\beta t + \gamma)$$

The factor $e^{-\alpha t}$, called the **damping factor,** causes the amplitude of the motion to approach zero as $t \to \infty$ (Figure 3a). ■

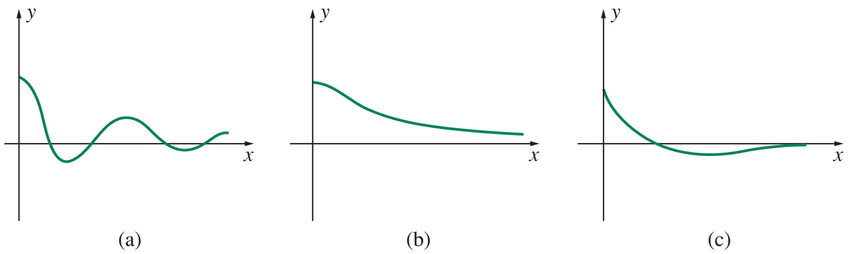


Figure 3

Case 2: $E^2 - 4B^2 = 0$ In this case, the auxiliary equation has the double root $-\alpha$ where $\alpha = E/2$ and the general solution of the differential equation is

$$y = C_1 e^{-\alpha t} + C_2 t e^{-\alpha t}$$

The motion described by this equation is said to be **critically damped.** ■

Case 3: $E^2 - 4B^2 > 0$ The auxiliary equation has roots $-\alpha_1$ and $-\alpha_2$, and the general solution of the differential equation is

$$y = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}$$

It describes a motion that is said to be **overdamped.**

The graphs in the critically damped and overdamped cases cross the t-axis at most once and may look something like Figure 3b or 3c. ■

EXAMPLE 2 If a damping force with $q = 0.2$ is imposed on the system of Example 1, find the equation of motion.

SOLUTION $E = qg/w = (0.2)(32)/20 = 0.32$ and $B^2 = (10)(32)/20 = 16$, so we must solve

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 0.32\frac{dy}{dt} + 16y = 0$$

The auxiliary equation $r^2 + 0.32r + 16 = 0$ has roots $r = -0.16 \pm \sqrt{15.9744}i \approx -0.16 \pm 4i$, and thus

$$y = e^{-0.16t}(C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t)$$

When we impose the conditions $y = 2$ and $y' = 0$ at $t = 0$, we find that $C_1 = 2$ and $C_2 = 0.08$. Consequently,

$$y = e^{-0.16t}(2\cos 4t + 0.08 \sin 4t)$$ ■

Electric Circuits Consider a circuit (Figure 4) with a resistor (R ohms), an inductor (L henrys), and a capacitor (C farads) in series with a source of electromotive force supplying $E(t)$ volts. The new feature in comparison to the circuits of Section 6.6 is the presence of a capacitor. Kirchhoff's Law in this situation says that the charge Q on the capacitor, measured in coulombs, satisfies

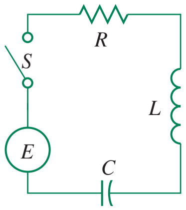


Figure 4

(1)
$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

The current $I = dQ/dt$, measured in amperes, satisfies the equation obtained by differentiating equation (1) with respect to t; that is,

(2)
$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = E'(t)$$

These equations can be solved by the methods of Sections 15.1 and 15.2 for many functions $E(t)$.