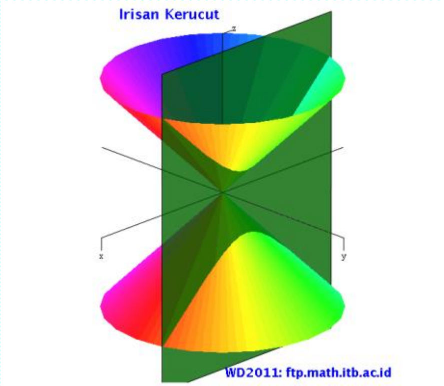
MA1101 MATEMATIKA 1A

KURIKULUM 2013-2018

INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG



Buku Teks :

CALCULUS, Varberg, Purcell, Rigdon, 9th ed.

Untuk dipakai di lingkungan

Kampus tercinta

Institut Teknologi Bandung

Freeware, not for Commercial Use

Pengantar

Isi diktat/slide ini disusun merujuk pada buku **Varberg, Purcell, Rigdon, Calculus, 9th ed.** yang merupakan buku teks perkuliahan Matematika 1A kurikulum 2013-2018 di ITB. Meskipun berbentuk slide, namun isinya disusun cukup rinci, sehingga dapat juga digunakan sebagai diktat pengganti catatan kuliah. Untuk melengkapi hal-hal yang dipandang perlu, selain dari buku rujukan, beberapa pokok bahasan ditambahkan dari berbagai sumber lain.

Sebelum membahas materi kalkulus, diktat ini diawali dengan beberapa sajian untuk memberikan gambaran tentang pemakaian Kalkulus pada berbagai masalah. Dengan ini pembelajar diharapkan lebih termotivasi dalam mendalami subjek kalkulus Selain itu terdapat juga sajian materi dasar-dasar logika. Dengan materi ini pembelajar diharapkan paham tentang alat-alat pembuktian yang umum digunakan pada matematika.

Diktat ini dapat diunduh /di *download* melalui *ftp server* dengan alamat ftp2.math.itb.ac.id atau mengakses langsung ke *IP address 167.205.6.17*. login *anonymous*, password *anonymous*. Proses pengunduhan hanya dapat dilakukan dari dalam kampus ITB. Akses dari luar kampus ITB harus dilakukan dengan menggunakan servis VPN. Click pada *hyperlink* di samping ini untuk melihat petunjuk detailnya. Δ

Semoga diktat ini dapat bermanfaat bagi Pengajar dan Mahasiswa di ITB.

Warsoma Djohan

Juli 2013

Motivasi

Click pada *hyperlink* di bawah ini (simbol ∆) untuk menampilkan topik yang bersesuaian.

- Why we learn Calculus (video, Prof. Starbird). ∆
- Ilustrasi penggunaan kalkulus pada masalah-masalah biologi. ∆
- Ilustrasi penggunaan kalkulus pada masalah fisika/elektronika. ∆
- Refleksi dari pengguna. ∆
- Dasar-dasar logika Matematika. ∆
- Selamat belajar Kalkulus ∆ ∆

BAB 0

Pertaksamaan dan Fungsi

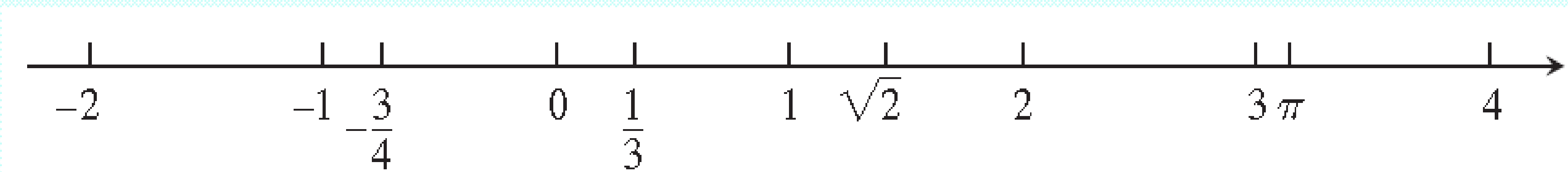
Bilangan Real

- Bilangan real adalah bilangan yang dapat dituliskan sebagai desimal,

  $-\frac{3}{4} = -0{,}75000\cdots \qquad \frac{1}{3} = 0{,}33333\cdots \qquad \sqrt{2} = 1.4142\cdots$

- Beberapa bilangan real mempunyai representasi yang tidak tunggal, misalnya bilangan satu, $1.000\cdots = 0{,}999\cdots$

- Bilangan real dapat digambarkan secara geometri memakai **garis real** sebagai berikut



- Himpunan semua bilangan real biasa dinotasikan dengan $\mathbb{R}$.

- Himpunan Bilangan asli (Natural Numbers),

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

- Himpunan Bilangan Bulat (Integers)

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

- Himpunan Bilangan Rasional (Rational Numbers)

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \middle|\ m, n \in \mathbb{Z}, \qquad n \neq 0\right\}$$

- Himpunan Bilangan Irasional (Irrational Numbers)
  Terdiri dari semua bilangan yang bukan bilangan rasional.
  Himpunan bilangan irasional tidak mempunyai symbol khusus Δ

- -∞ dan ∞ bukan bilangan real. Simbol tersebut hanya untuk menyatakan bilangan yang mengecil/membesar tanpa batas.

Latihan: Buktikan $\sqrt{2}$ merupakan bilangan irasional. Δ

Dipakai untuk untuk menyatakan urutan/relasi bilangan real.

Ada 4 operator relasional yang sering dipakai: $<$, $\leq$, $>$, $\geq$

Notasi $\leq$ mempunyai arti *lebih kecil atau sama-dengan*.
Jadi pernyataan $2 \leq 2$ dan $2 \leq 3$, kedua-duanya benar.

Rules for Inequalities

If a, b, and c are real numbers, then:

1. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
2. $a < b \Rightarrow a - c < b - c$
3. $a < b$ and $c > 0 \Rightarrow ac < bc$
4. $a < b$ and $c < 0 \Rightarrow bc < ac$
   Special case: $a < b \Rightarrow -b < -a$
5. $a > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} > 0$
6. If a and b are both positive or both negative, then $a < b \Rightarrow \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$

Interval / Selang dan Notasinya

Himpunan $I \subset \mathbb{R}$ disebut *interval*, bila I memiliki minimal dua buah anggota dan memuat semua bilangan diantara kedua anggota tersebut.

TABLE 1.1 Types of intervals

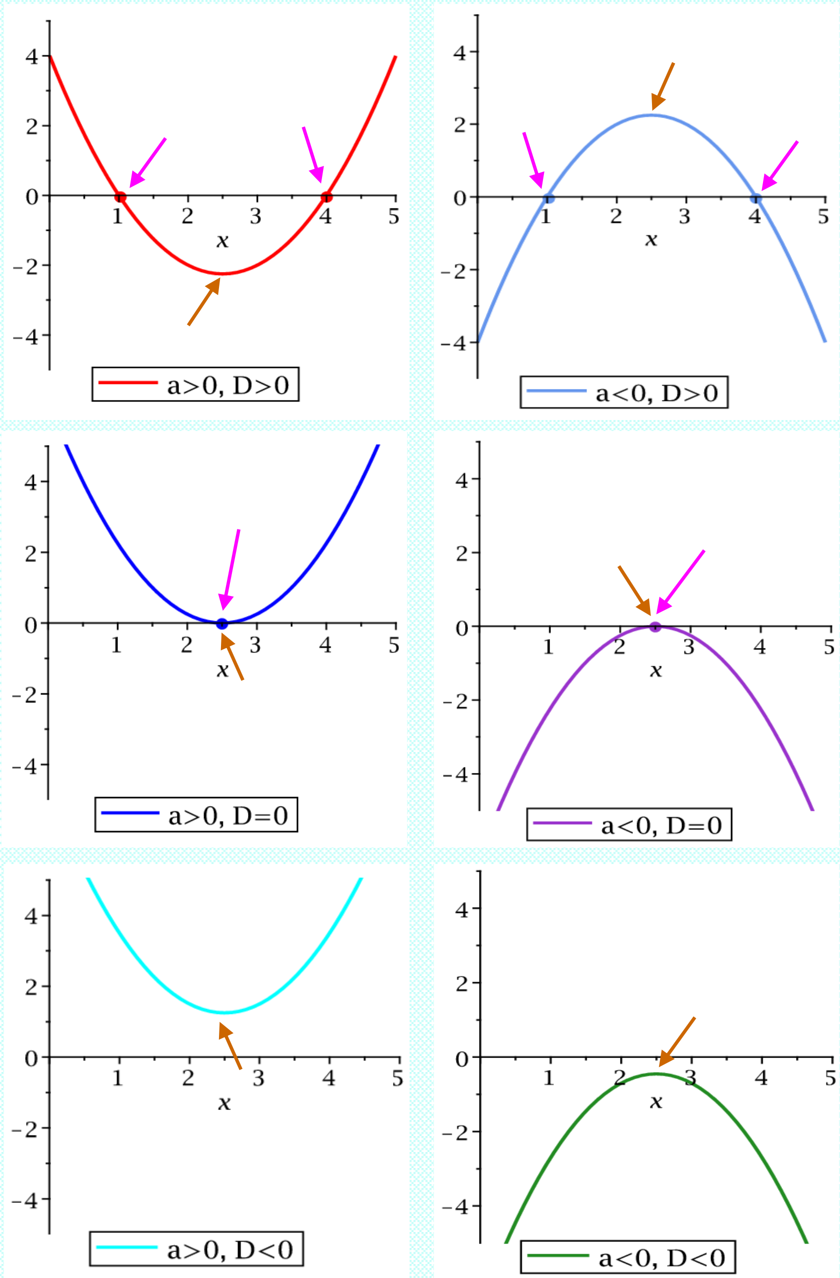
	Notation	Set description	Type	Picture
Finite:	(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	Open	
	$[a, b]$	$\{x \mid a \le x \le b\}$	Closed	
	$[a, b)$	$\{x \mid a \le x < b\}$	Half-open	
	$(a, b]$	$\{x \mid a < x \le b\}$	Half-open	
Infinite:	(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	Open	
	$[a, \infty)$	$\{x \mid x \ge a\}$	Closed	
	$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	Open	
	$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \le b\}$	Closed	
	$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (set of all real numbers)	Both open and closed	

- Bentuk umum: $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$
  $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ konstanta real, disebut koefisien polinom,
  x adalah bilangan real sebarang, belum diberi nilai.
  n disebut derajat polinom, dengan syarat $a_n \neq 0$.
- Contoh: $P(x) = 12 + 8x - 7x^2 - 2x^3 + x^4$
  $P(x)$ polinom derajat 4.
- Bilangan real r disebut ***akar*** polinom bila $P(r) = 0$.
  Tunjukkan $r = 2$ merupakan akar dari $P(x)$ Δ

Suku banyak

- Polinom-polinom special:
  Polinom derajat satu (linear): $P(x) = a_0 + a_1 x$
  Polinom derajat dua (kuadrat/parabola): $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$
- Teorema: Setiap polinom derajat ≥ 3 selalu dapat difaktorkan atas faktor-faktor linear atau kuadrat definit (polinom kuadrat yang tidak punya akar).
  Contoh: Lakukan faktorisasi terhadap $p(x) = 2x^4 - x^3 + 4x^2 + 7x - 12$
  lalu tentukan daerah di mana p positif dan negatif Δ

Karakteristik Polinom Kuadrat / Parabola Ω Ω Ω Ω



- $P(x) = ax^2 + bx + c,\ \ a \neq 0.$
- Diskriminan $D = b^2 - 4ac$ menentukan banyaknya akar real.
  $D > 0$: dua akar real berbeda.
  $D = 0$: dua akar real kembar.
  $D < 0$: tidak ada akar real.
- Nilai a menentukan bentuk kecekungan grafiknya.
  $a > 0$, grafik cekung ke atas.
  $a < 0$, grafik cekung ke bawah.
- Akar-akar polinom kuadrat:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\ \ x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

- Puncak parabola: $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$

- Bentuk umum : $\frac{A(x)}{B(x)} < \frac{C(x)}{D(x)}$ dengan $A(x), \dots, D(x)$ polinom.

  Tanda $<$ dapat juga berupa $\leq$, $>$, atau $\geq$

- Contoh: $\frac{x+1}{2-x} \geq \frac{x}{x+3}$

$\leqslant$

- Tujuan: mencari ***solusi*** dari pertaksamaan tersebut, yaitu menentukan semua bilangan real x yang memenuhi pertaksamaan.

- Langkah-langkah *ekivalen* untuk mencari solusi pertaksamaan:
  - Menambah / mengurangi kedua ruas dengan bilangan yang sama
  - Mengalikan kedua ruas dengan bilangan positif
  - Mengalikan kedua ruas dengan bilangan negative akan mengubah tanda pertaksamaan menjadi *kebalikannya.*

Prosedur Umum Menyelesaikan Pertaksamaan Rasional

- Tentukan daerah definisi pertaksamaan. $\dfrac{x+1}{2-x} \geq \dfrac{x}{x+3} \qquad x \neq 2, x \neq -3$

- Buat agar salah satu ruas menjadi nol. $\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{2-x} - \dfrac{x}{x+3} \geq 0$

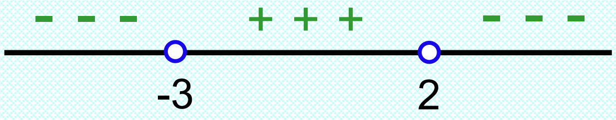
- Samakan penyebutnya $\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)(x+3)}{(2-x)(x+3)} - \dfrac{x(2-x)}{(x+3)(2-x)} \geq 0$

- Satukan pembilang dan penyebut. $\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)(x+3) - x(2-x)}{(2-x)(x+3)} \geq 0$

- Faktorkan pembilang dan penyebut. $\Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 4x + 3 - 2x + x^2}{(2-x)(x+3)} \geq 0$

- Tandai akar-akar pembilang dan penyebut. $\Leftrightarrow \dfrac{2x^2 + 2x + 3}{(2-x)(x+3)} \geq 0$

- Periksa *tanda* pada garis real.



tanda $\dfrac{2x^2+2x+3}{(2-x)(x+3)}$

- Simpulkan solusinya. HP = (-3,2)

Contoh Soal

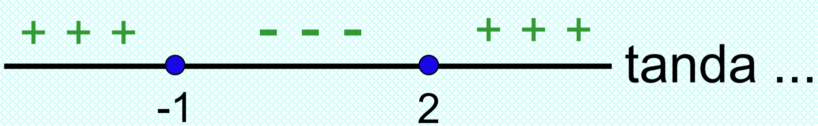
Tentukan solusi dari pertaksamaan $2 \le x^2 - x < 6$

Pada soal ini, x harus memenuhi $2 \le x^2 - x$ dan $x^2 - x < 6$

$$2 \le x^2 - x$$

$$\Leftrightarrow 0 \le x^2 - x - 2$$

$$\Leftrightarrow 0 \le (x+1)(x-2)$$

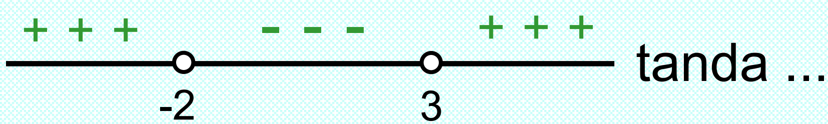


$$\text{HP1} = (-\infty, -1] \cup [2, \infty)$$

$$x^2 - x < 6$$

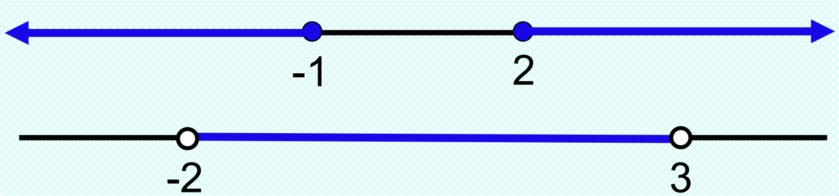
$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x+2) < 0$$



$$\text{HP2} = (-2, 3)$$

Himpunan Penyelesaian HP = HP1 ∩ HP2



$$\text{HP} = (-2, -1] \cup [2, 3)$$

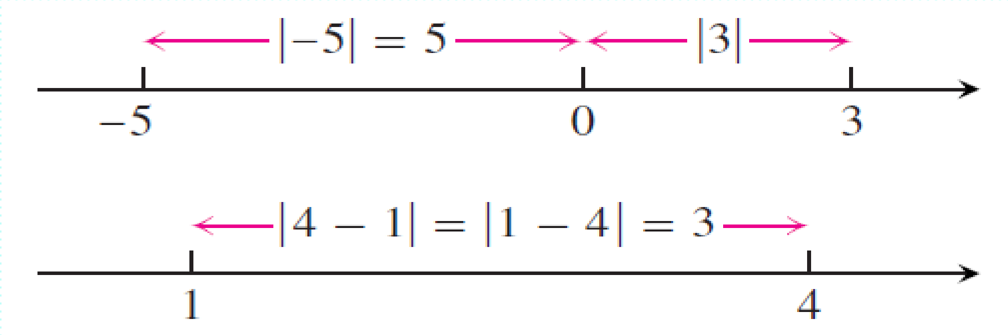
Soal-soal Latihan Mandiri

Tentukan solusi dari pertaksamaan-pertaksamaan berikut ini:

1. $2x - 1 < x + 3$
2. $-\frac{x}{3} < 2x + 1$
3. $\frac{6}{x-1} \geq 5$

Harga Mutlak (Absolute Value)

- Misalkan $x \in \mathbb{R}$. Harga mutlak dari x adalah $|x| = \begin{cases} -x, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$
- Ilustrasi: $|3| = 3, \ |-5| = 5, \quad |0| = 0.$
- Secara geometri $|x - y|$ merupakan jarak antara x dan y.



- Sifat-sifat:

  a. $|-a| = |a|$ b. $|ab| = |a| \cdot |b|$

  c. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ d. $|a + b| \le |a| + |b|$ (*pertaksamaan segitiga)*

  e. $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$ f. $|x| \ge a \Leftrightarrow x \le -a$ atau $x \ge a$

1. Tuliskan tanpa tanda mutlak

   a. $|x-4|$ $\underline{\Delta}$ b. $|x+2|+|x+3|$ $\underline{\Delta}$

2. Tentukan solusi dari persamaan berikut:

   a. $|x-3|=x-3$ $\underline{\Delta}$ b. $|x-1|=2$

3. Tentukan solusi pertaksamaan berikut:

   a. $|x-4|\le 1$ $\underline{\Delta}$ b. $\left|5-\frac{2}{x}\right|<1$

   c. $\left|x+\frac{1}{x}\right|\le 2$ $\underline{\psi}$ d. $|2x+3|\le|x-3|$ $\underline{\Delta}$

4. Apakah implikasi berikut benar, $-1\le x\le 3 \Rightarrow |x|<1$?

   Bagaimana dengan sebaliknya, $|x|<1 \Rightarrow -1\le x\le 3$?

5. Tunjukkan kebenaran implikasi: $|\mathrm{x}|\le 2 \Rightarrow \left|\frac{2x^2+3x+2}{x^2+2}\right|\le 8$ $\underline{\psi}$

6. Tentukan bilangan positif δ supaya implikasi berikut benar:

   a. $|x-2|<\delta \Rightarrow |5x-10|<1$ $\underline{\Delta}$

   b. $|x-2|<\delta \Rightarrow |6x-18|<24$ $\underline{\Delta}$

Akar Kuadrat / Akar Pangkat Dua

- Misalkan $x \geq 0$. Akar kuadrat dari x, ditulis $\sqrt{x}$ adalah **bilangan tak negatif** $\boldsymbol{a}$ yang bersifat $a^2 = x$

- Ilustrasi: $\sqrt{9} = 3,\qquad \sqrt{(-4)^2} = 4,\qquad \sqrt{0} = 0.$

- Secara umum berlaku hubungan $\sqrt{x^2} = |x|$

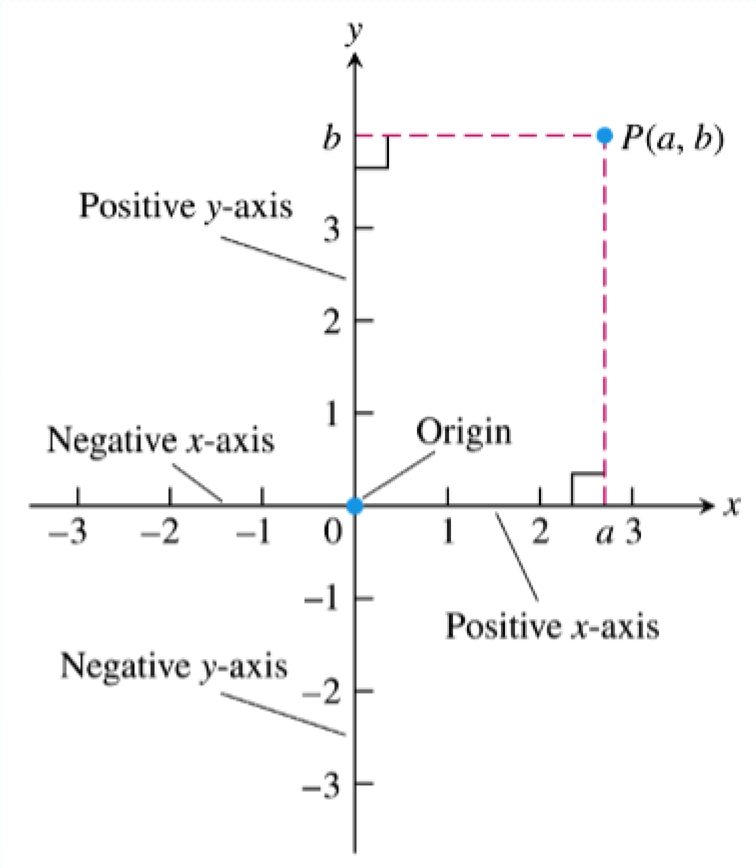
- Perhatikan **perbedaannya dengan penarikan akar kuadrat**:

  $$x^2 = b \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{b}$$

  Jadi solusi dari $x^2 = 4$ adalah $+2$ dan -2

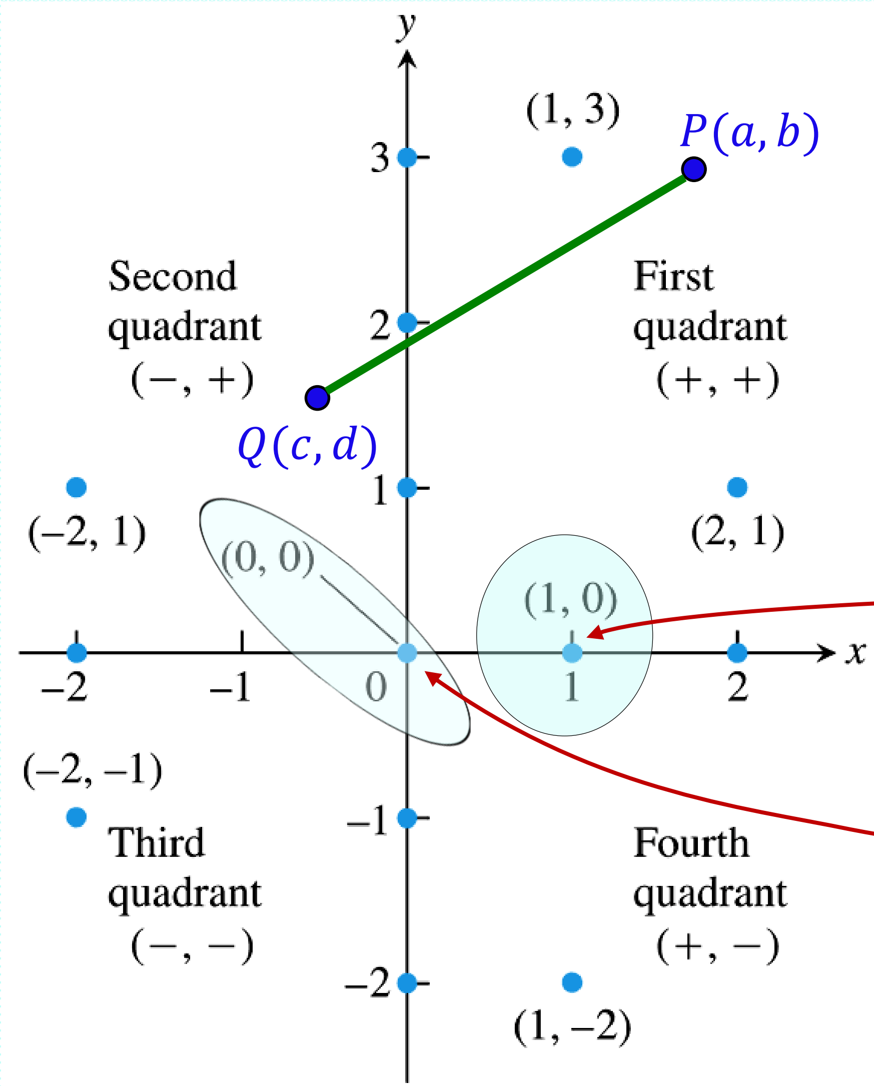
- Latihan: Tentukan solusi dari $\sqrt{x-1} < 1$ $\underline{\Delta}$

Sistem Koordinat Persegi Panjang (Cartesian Coordinates)



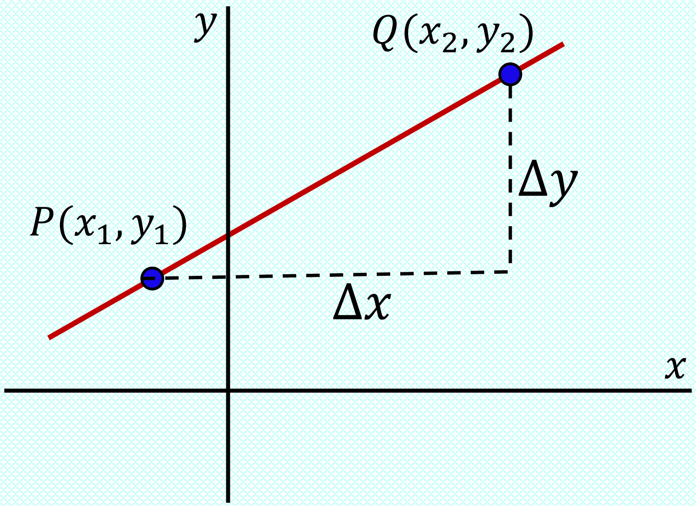
- Dibentuk oleh garis horizontal (sumbu x) dan garis vertikal (sumbu y)
- Perpotongan ke dua garis tersebut disebut ***pusat koordinat*** (origin).
- Garis horizontal di kanan pusat koordinat disebut ***sumbu** x **positif***, sedangkan yang di kirinya disebut ***sumbu** x **negatif***
- Garis vertikal di atas pusat koordinat disebut ***sumbu** y **positif***, sedangkan yang dibawahnya disebut ***sumbu** y **negatif***

- Setiap titik pada bidang dapat dinyatakan sebagai pasangan terurut $P(a, b)$. a disebut **komponen-x /absis** sedangkan b disebut **komponen-y / ordinat**



- Dalam sistem koordinat persegi panjang, bidang terbagi menjadi 4 bagian: ***kuadran 1***, ⋯ , ***kuadran 4***
- Titik pada sumbu x atau sumbu y biasa ditandai dengan satu angka saja. Sebagai contoh titik $(1,0)$ pada sumbu x biasa ditandai dengan angka 1 saja.
- Pusat koordinat, yaitu titik $(0,0)$ biasa ditulis 0 saja.
- Misalkan $P(a,b)$ dan $Q(c,d)$ dua titik di bidang. Jarak anatara kedua titik tersebut

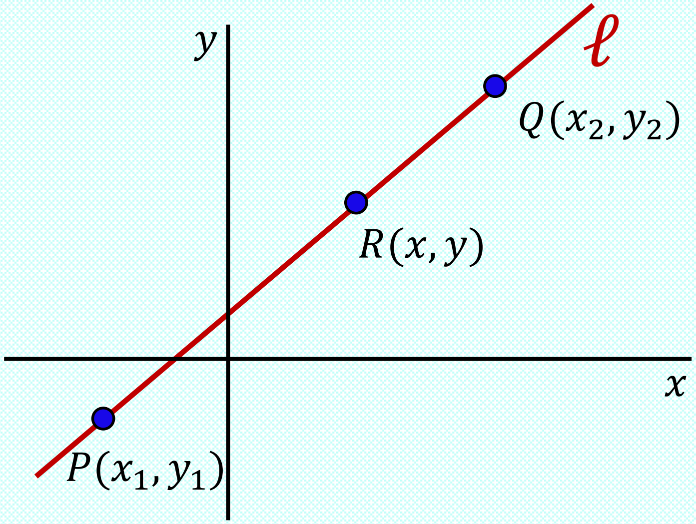
$$\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$$ **Buktikan!**



- Perhatikan dua buah titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ di bidang.
- Melalui dua titik tersebut dapat dibuat tepat sebuah garis lurus.
- Sebut perubahan pada x dan y masing-masing: $\Delta x = x_2 - x_1$ dan $\Delta y = y_2 - y_1$

  (Δx dan Δy dapat bernilai negatif)

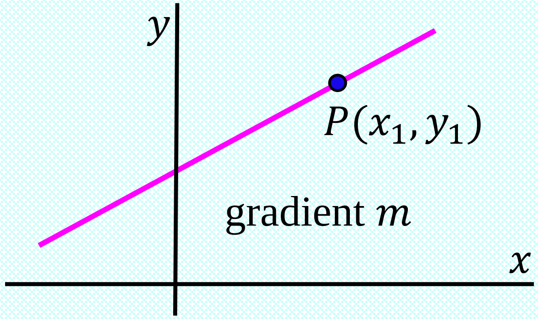
- ***Kemiringan / gradien dari garis*** didefinisikan sebagai $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- **Kemiringan sebuah garis bersifat tunggal**, artinya tidak bergantung pada pilihan titik yang digunakan untuk menghitungnya. **Buktikan!**
- *Hyperlink* berikut memperlihatkan makna gradien secara geometri. Δ

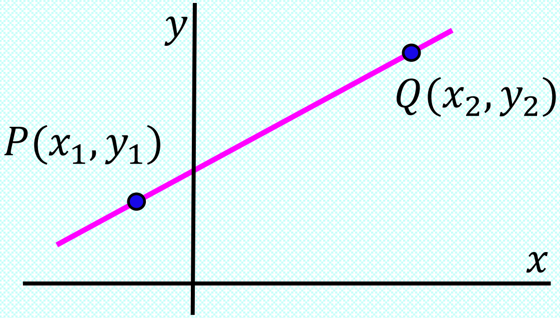


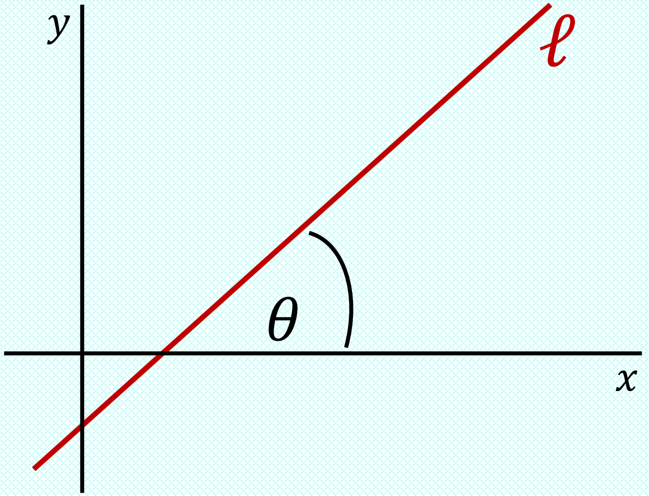
- Perhatikan garis ℓ yang melalui titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ dengan $x_1 \neq x_2$
- Misalkan $R(x, y)$ sebarang titik pada garis tersebut.
- Kemiringan garis: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$
- Dari hubungan di atas, kita memperoleh dua kesimpulan berikut:

1. Persamaan garis dengan kemiringan m dan melalui titik (x_1, y_1) adalah: $y - y_1 = m(x - x_1)$

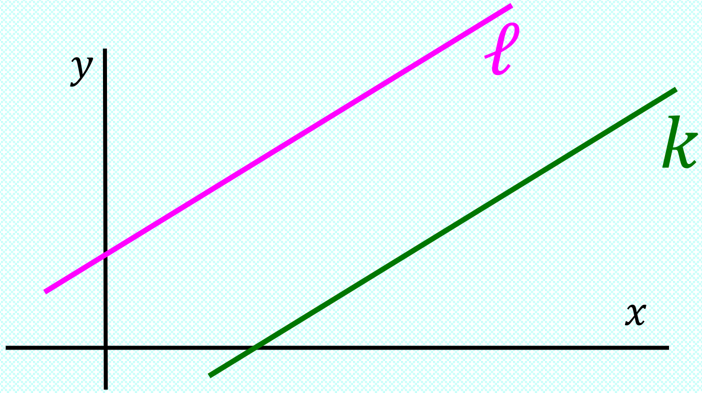
2. Persamaan garis melalui dua buah titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

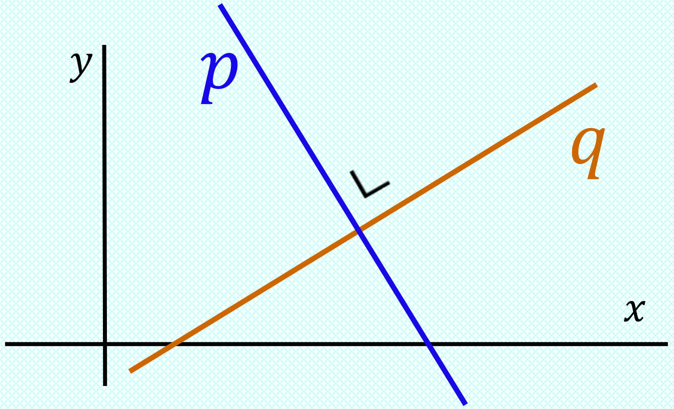




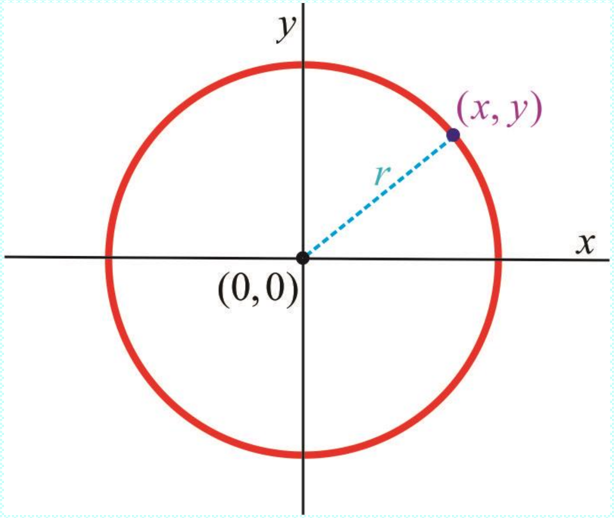


- Sudut yang dibentuk oleh sumbu x positif dengan sebuah garis (dihitung berlawanan arah putaran jarum jam) disebut **sudut inklinasi**.
- Kemiringan garis, $m = \tan\theta$

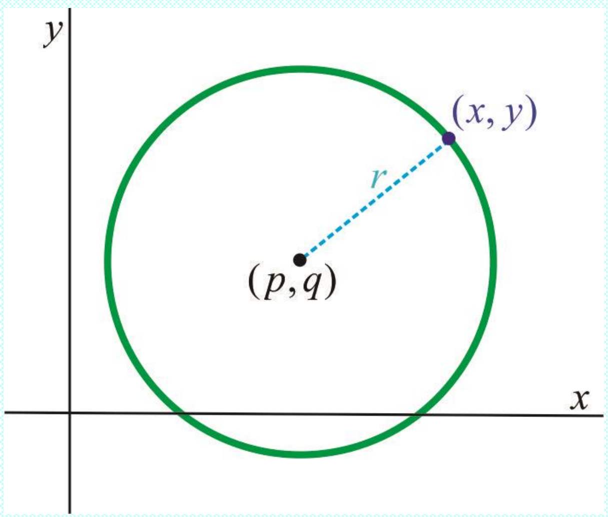




- Dua buah garis yang **sejajar** mempunyai **kemiringan yang sama**.
- Misalkan kemiringan garis p dan q masing-masing m_1 dan m_2. Bila kedua garis tersebut **saling tegak lurus** maka $\boldsymbol{m_1 \cdot m_2 = -1}$

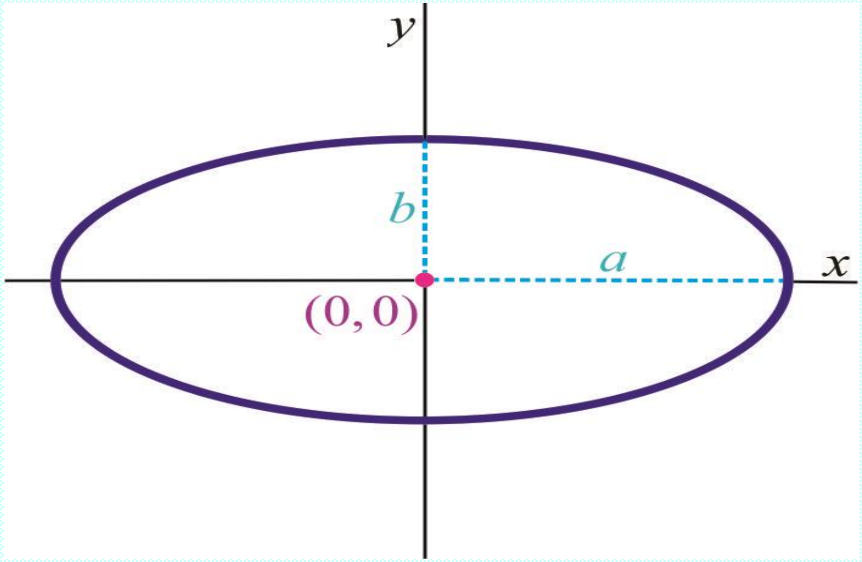


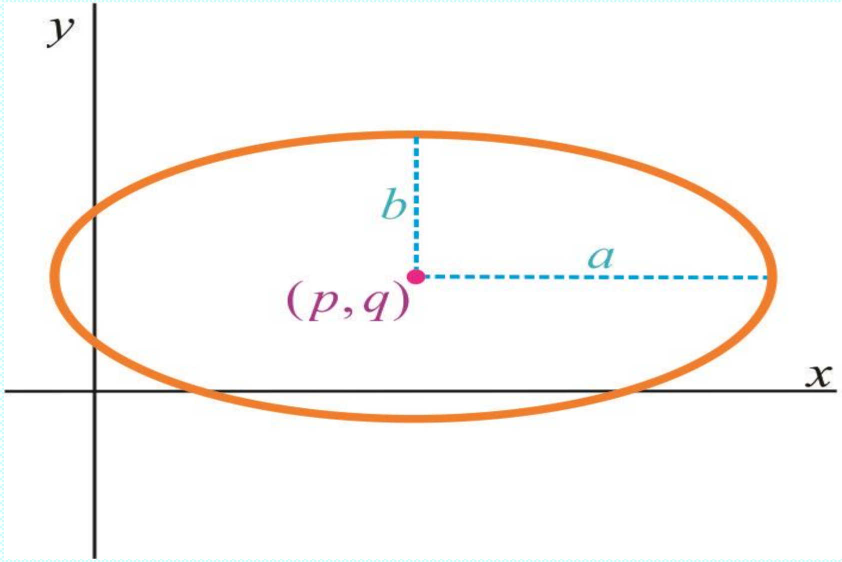
$x^2 + y^2 = r^2$



$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$

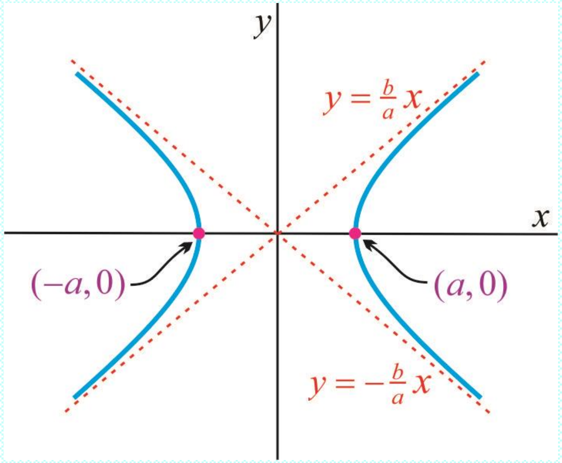
- Lingkaran adalah kumpulan titik-titik di bidang yang jaraknya sama terhadap titik tertentu. Titik tersebut disebut pusat lingkaran.
- Perhatikan lingkaran yang berpusat di $(0,0)$. Misalkan (x, y) sebarang titik pada lingkaran tersebut. Jarak titik tersebut ke pusat lingkaran adalah $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Kesimpulan, persamaan lingkaran yang berpusat di $(0,0)$ dengan jari-jari r: $x^2 + y^2 = r^2$
- Dengan cara yang sama dapat dibuktikan persamaan lingkaran dengan pusat (p, q) dan jari-jarinya r adalah $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$





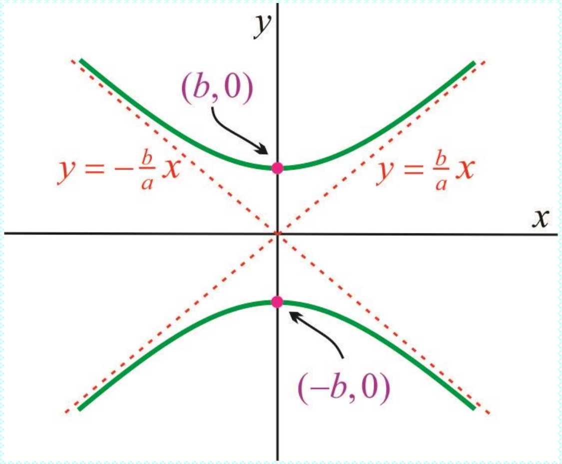
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-b)^2}{b^2}=1$$



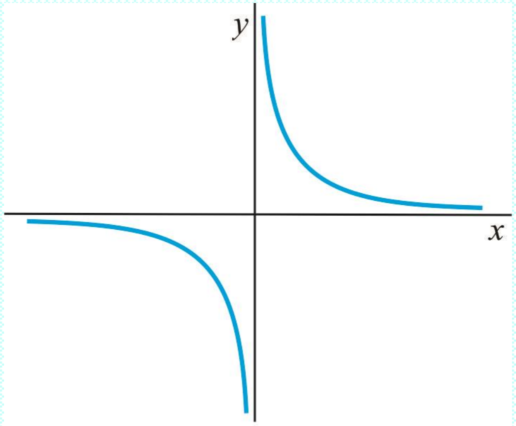
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

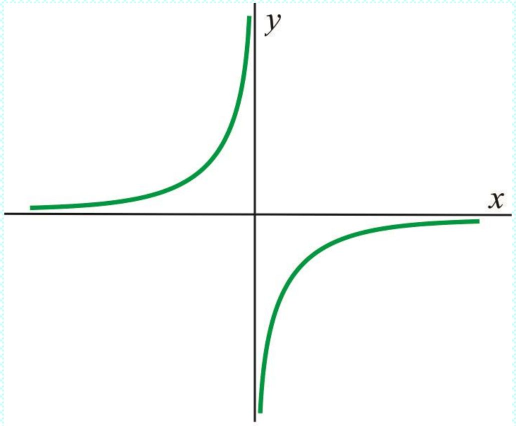


Asimptot miring

$y=\frac{b}{a}x$ dan $y=-\frac{b}{a}x$



$xy=k$, dengan k>0



$xy=k$, dengan k<0

Bila kedua hiperbola di atas diputar sebesar 45^0 dengan arah berlawanan jarum jam, maka akan terbentuk kurva seperti pada gambar di samping kiri.

Persamaan hasil rotasinya adalah $xy=k$ dengan k konstanta. **Buktikan!**

Latihan.

1. Tentukan persamaan garis yang melalui titik $(2,3)$ dan kemiringannya $-\frac{3}{2}$.
2. Tentukan persamaan garis yang melalui titik $(-2,-1)$ dan $(3,4)$.
3. Tentukan kemiringan dan titik potong dengan sumbu-sumbu kordinat dari $8x + 5y = 20$.
4. Tentukan persamaan garis yang melalui titik $(1,2)$ dan tegak lurus terhadap garis $6x + 3y = -3$.
5. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $(2,-1)$ dan melalui titik $(-2,3)$.
6. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 - 2x + y^2 + 4y - 20 = 0$.
7. Gambarkan elips berikut: $4x^2 - 24x + y^2 - 4y + 39 = 0$.

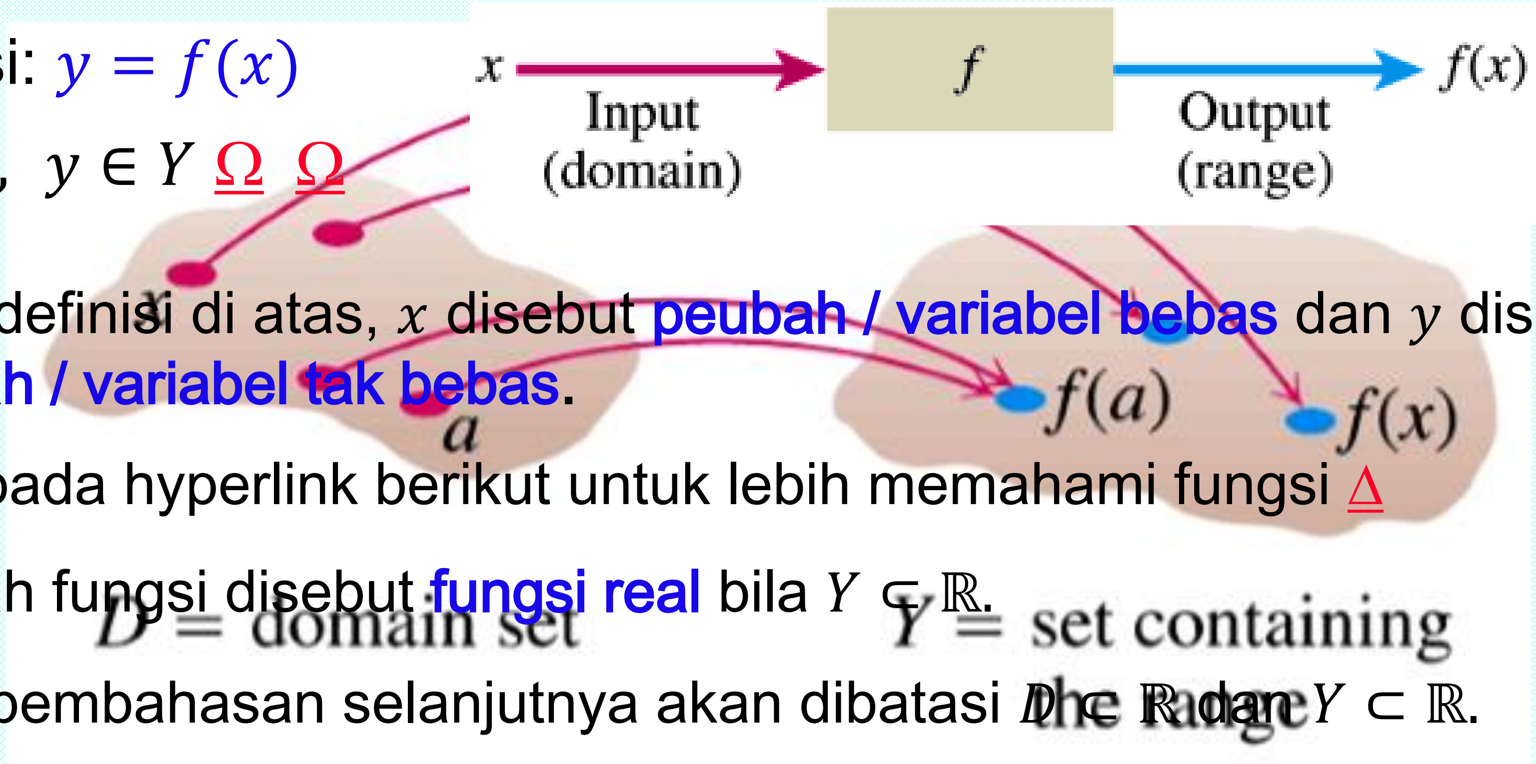
Fungsi.

- Perhatikan beberapa hal berikut: *Titik didih air* di suatu tempat bergantung pada *ketinggian tempat* tersebut dari permukaan laut, *Keuntungan* yang diperoleh dari suatu investasi bergantung pada lamanya *waktu investasi* tersebut, *Jarak tempuh* sebuah objek yang bergerak bergantung pada *interval waktu* yang dijalani. Besarnya *biaya parkir* sebuah mobil bergantung pada *interval waktu* kendaraan tersebut diparkir. *Laju pertambahan populasi* koloni bakteri bergantung pada *jumlah bakteri* saat itu.
- Pada ilustrasi di atas, terlihat sebuah besaran nilainya bergantung / ditentukan oleh besaran yang lain.
- Dalam ilmu kalkulus masalah-masalah seperti di atas disusun dalam satu rumusan umum yang disebut **Fungsi.**
- Melalui fungsi, orang dapat menganalisis berbagai masalah dengan lebih “mudah” dan “teratur”.

Definisi: Fungsi dari himpunan D ke himpunan Y adalah aturan me-masangkan setiap elemen $x \in D$ dengan satu elemen $y \in Y$

Notasi: $y = f(x)$

$x \in D,\ \ y \in Y$ Ω Ω



Pada definisi di atas, x disebut **peubah / variabel bebas** dan y disebut **peubah / variabel tak bebas**.

Click pada hyperlink berikut untuk lebih memahami fungsi △

Sebuah fungsi disebut **fungsi real** bila $Y \subset \mathbb{R}$.

Pada pembahasan selanjutnya akan dibatasi $D \subset \mathbb{R}$ dan $Y \subset \mathbb{R}$.

Contoh: Persamaan mana yang mendefinisikan $y = f(x)$.

a. $y = x^2 + x^4$ △ b. $xy^3 = 1$ △ c. $x^2y = 1$ △

d. $x^2 + y^2 = 1$ △ e. $x^3 + y^3 = 1$ △ f. $x^2 + y^3 = 1$ △

Daerah Definisi (Domain) dan Daerah Nilai (Range)

Misalkan f fungsi dari D ke Y.

- **Daerah definisi / domain** dari fungsi f, dinotasikan D_f adalah $D_f = \{x \in D \mid f(x)$ terdefinisi$\}$
- **Daerah nilai / range** dari fungsi f, dinotasikan R_f adalah $R_f = \{y \in Y \mid y = f(x), x \in D_f\}$

Contoh: Fungsi $f(x) = \sqrt{-x}$, $D_f = (-\infty, 0]$ dan $R_f = [0, \infty)$

Tentukan D_f, R_f dan gambarkan grafik fungsi $y = f(x)$ berikut,

a. $y = x + \sqrt{x}$ Δ

b. $y = |x|$ Δ

c. $y = x^2, \; -1 \leq x \leq 1$

d. $y = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ Δ

e. $y = \lfloor x \rfloor$, *greatest integer/floor function* Δ

f. $y = \sqrt{1 - x^2}$

g. $y = \lceil x \rceil$, *least integer/ceiling function* Δ

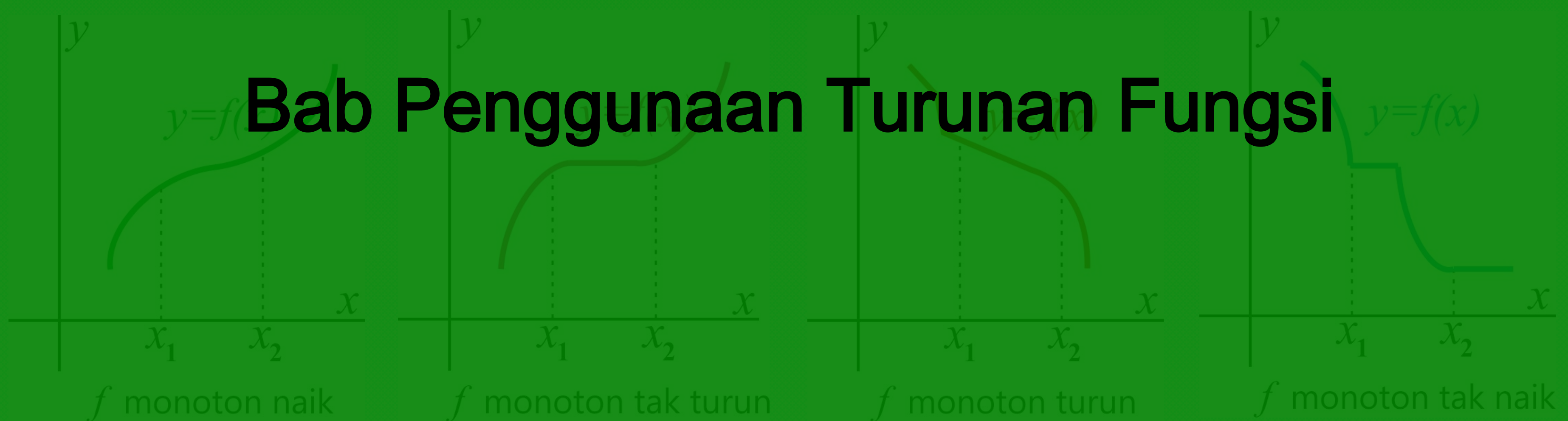
Misalkan fungsi f terdefinisi pada sebuah interval I, dan x_1, x_2 dua titik sebarang di I dengan $x_1 < x_2$

- Fungsi f disebut **monoton naik** bila $f(x_1) < f(x_2)$
- Fungsi f disebut **monoton tak turun** bila $f(x_1) \le f(x_2)$
- Fungsi f disebut **monoton turun** bila $f(x_1) > f(x_2)$
- Fungsi f disebut **monoton tak naik** bila $f(x_1) \ge f(x_2)$

Halaman ini dilewat,

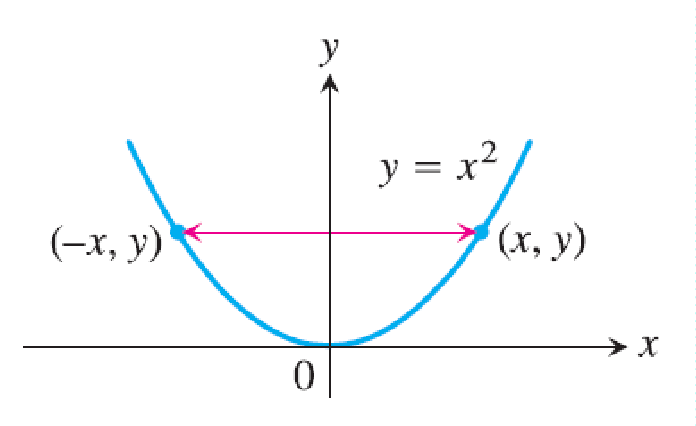
Topiknya akan dibicarakan pada

Bab Penggunaan Turunan Fungsi

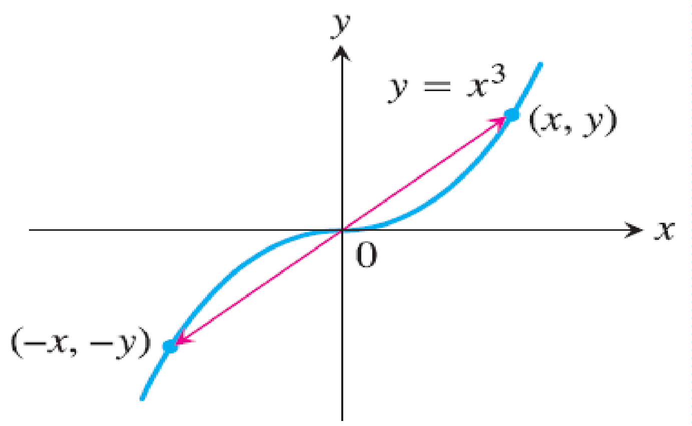


- Berikan contoh dari masing-masing jenis fungsi di atas.

- Sebuah fungsi f disebut **fungsi genap** bila $f(-x) = f(x)$.
- Grafik dari fungsi genap simetri terhadap sumbu y. $\underline{\Omega}$



- Sebuah fungsi f disebut **fungsi ganjil / gasal** bila $f(-x) = -f(x)$.
- Grafik dari fungsi gasal simetri terhadap titik $(0,0)$. $\underline{\Omega}$

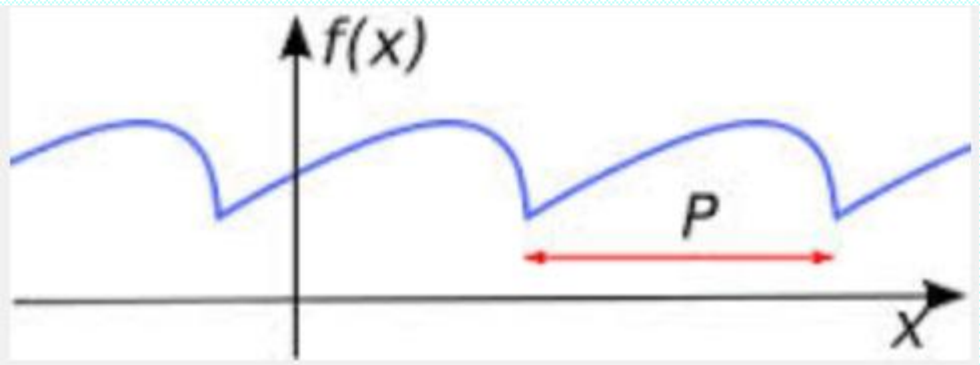


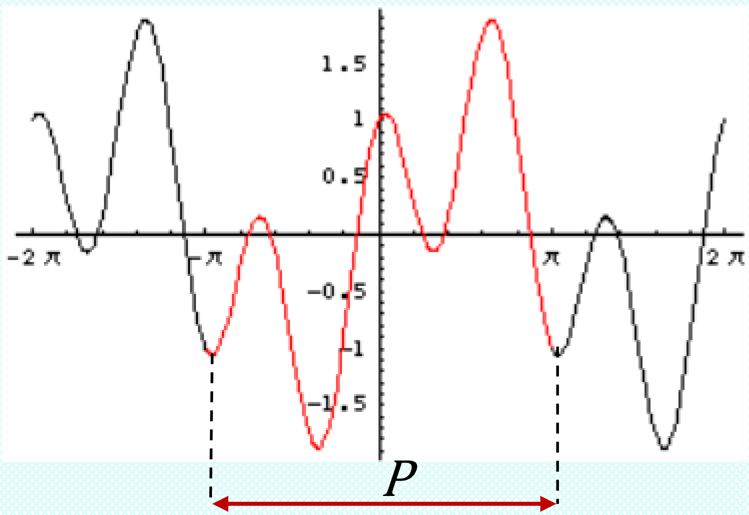
Latihan:

1. Periksa apakah fungsi berikut termasuk fungsi genap atau gasal.
   a. $y = x^2$ $\underline{\Delta}$ b. $y = x^3$ $\underline{\Delta}$ c. $y = x^5 + 3x^2 + 1$ $\underline{\Delta}$ d. $y = |x|$
   e. $y = |x - 1|$ $\underline{\Delta}$ f. $y = \lfloor x \rfloor$ $\underline{\Delta}$ g. $y = \lceil x \rceil$ h. $y = \lfloor x^2 \rfloor$

2. Adakah fungsi yang sekaligus fungsi genap dan gasal?

- Sebuah fungsi f disebut **fungsi periodik** bila terdapat real p sehingga berlaku $f(x+p) = f(x)$ Ω
- Nilai p terkecil sehingga $f(x+p) = f(x)$ disebut periode dari fungsi tersebut.

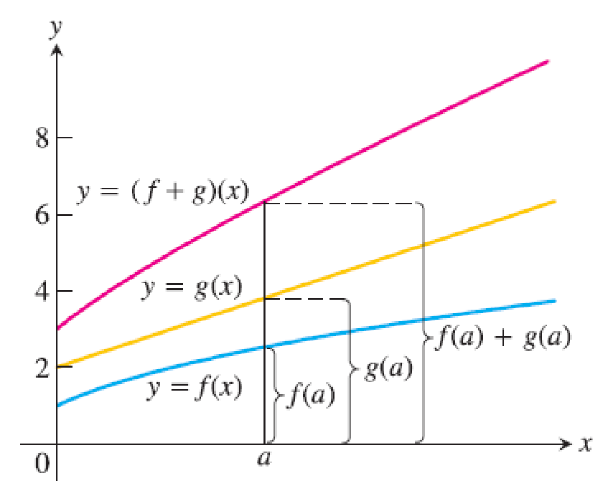


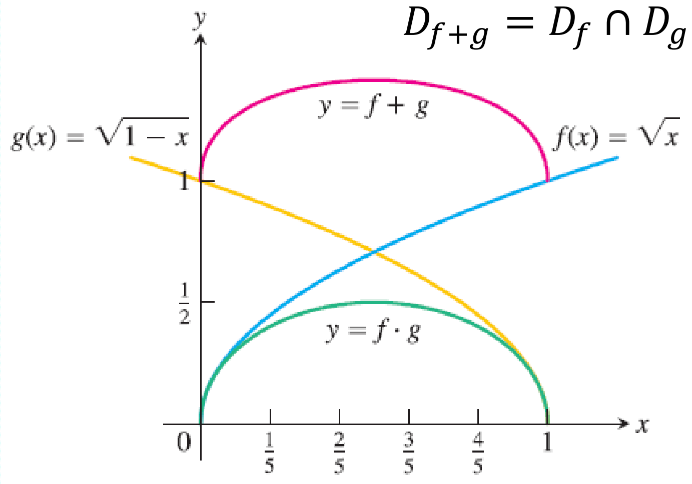


- Latihan: Berikan contoh sebuah fungsi periodik dengan periode 2

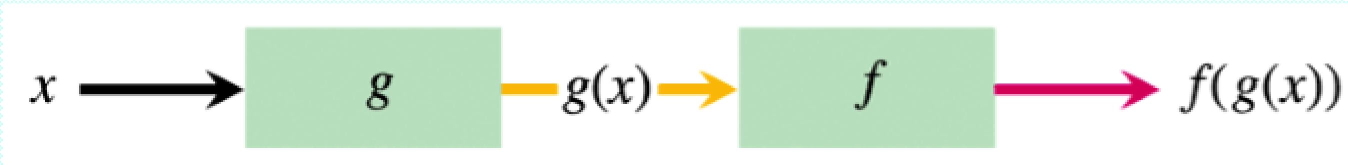
Misalkan f dan g dua buah fungsi real dengan daerah definisi D_f dan D_g

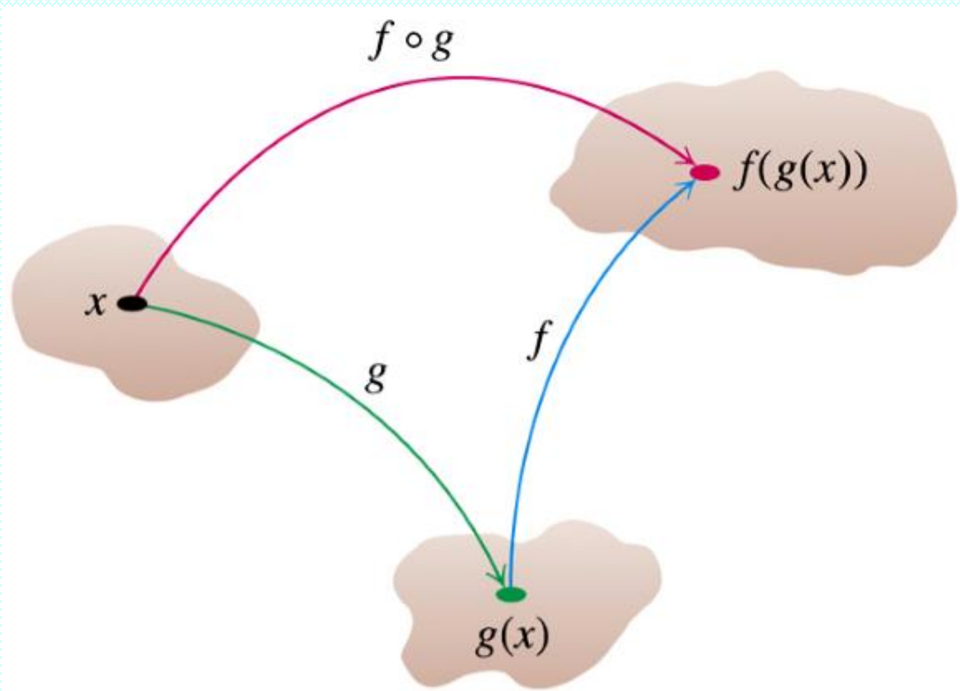
- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $\underline{\Omega}$ $\qquad D_{f+g} = D_f \cap D_g$
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ $\underline{\Omega}$ $\qquad D_{f-g} = D_f \cap D_g$
- $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$ $\underline{\Omega}$ $\qquad D_{fg} = D_f \cap D_g$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ $\underline{\Omega}$ $\qquad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \mid g(x) \neq 0\}$
- $(cf)(x) = c \cdot f(x)$ $\underline{\Omega}$ $\qquad D_{cf} = D_f$ $\qquad$ (c konstanta)
- $f^n(x) = \underbrace{f(x) \cdot f(x) \cdots f(x)}_{\text{n suku}}$ $\qquad D_{f^n} = D_f$ $\qquad$ (n bilangan asli)





- Misalkan f dan g dua buah fungsi. **Fungsi komposisi $\boldsymbol{f}$ dengan $\boldsymbol{g}$**, dinotasikan $\boldsymbol{f \circ g}$ didefinisikan sebagai $(\boldsymbol{f \circ g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$





Daerah definisi fungsi komposisi $f \circ g$ adalah semua titik pada D_g yang bersifat $g(x) \in D_f$

Contoh:

$f(x) = x^2$ dan $g(x) = \sqrt{x-1}$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2$$

$$= \left(\sqrt{x-1}\right)^2 = |x-1|$$

$D_{f \circ g} = [1, \infty)$

Mengapa $D_{f \circ g} \neq \mathbb{R}$?

1. Misalkan $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x^2 - 1$, tentukan aturan fungsi komposisi berikut beserta daerah definisinya:

   (a) $(f \circ g)(x)$ (b) $(g \circ f)(x)$ (c) $(f \circ f)(x)$ (d) $(g \circ g)(x)$

   (a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2 - 1}$ $D_{f\circ g} = [-\infty, -1) \cup [1, \infty)$

   (b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f^2(x) - 1 = |x| - 1$ $D_{g\circ f} = [0, \infty)$

   (c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$ $D_{f\circ f} = [0, \infty)$

   (d) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g^2(x) - 1 = x^2 - 2$ $D_{g\circ g} = \mathbb{R}$

2. Nyatakan fungsi $h(x) = \sqrt{x^2 + 4}$, sebagai komposisi dua buah fungsi. Berikan dua macam pasangan fungsi komposisinya supaya $h = g \circ f$

   $f(x) = x^2 + 4$ dan $g(x) = \sqrt{x}$

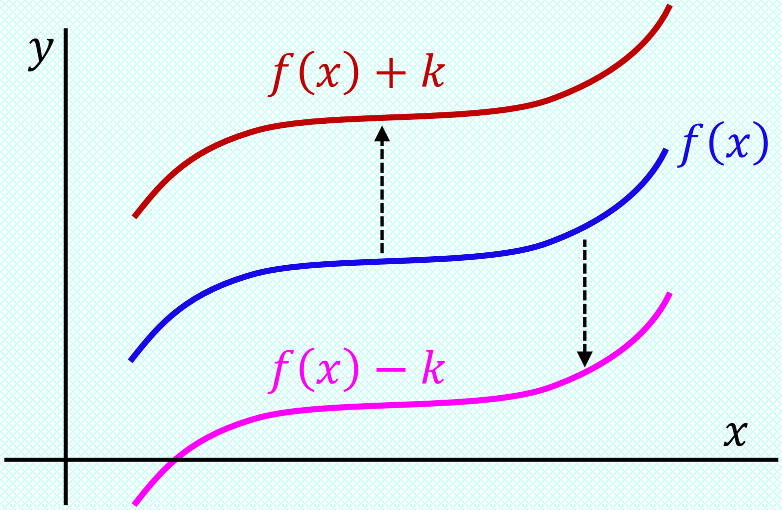
   atau

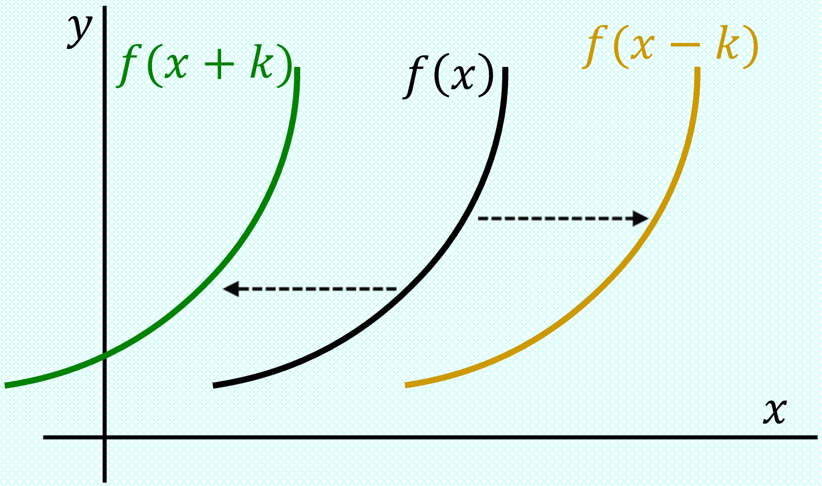
   $f(x) = \cdots$ dan $g(x) = \cdots$

Pergeseran Grafik Fungsi

Diberikan grafik fungsi real $y = f(x)$ dan $k > 0$.

- Grafik $y = f(x) - k$ merupakan pergeseran dari grafik $f(x)$ sejauh sejauh k ke bawah.
- Grafik $y = f(x) + k$ merupakan pergeseran dari grafik $f(x)$ sejauh sejauh k ke atas.
- Grafik $y = f(x - k)$ merupakan pergeseran dari grafik $f(x)$ sejauh k ke kanan. Δ
- Grafik $y = f(x + k)$ merupakan pergeseran dari grafik $f(x)$ sejauh k ke kiri.
- Latihan:
  Gambarkan grafik $g(x) = x^2 + 4x + 3$ berdasarkan pergeseran grafik $f(x) = x^2$





Diberikan grafik fungsi real $y = f(x)$

- **Untuk $c > 1$, berlaku sifat-sifat berikut:**

  $y = cf(x)$ Peregangan grafik f pada arah vertikal dengan faktor c.

  $y = \frac{1}{c} f(x)$ Pemampatan grafik f pada arah vertikal dengan faktor c.

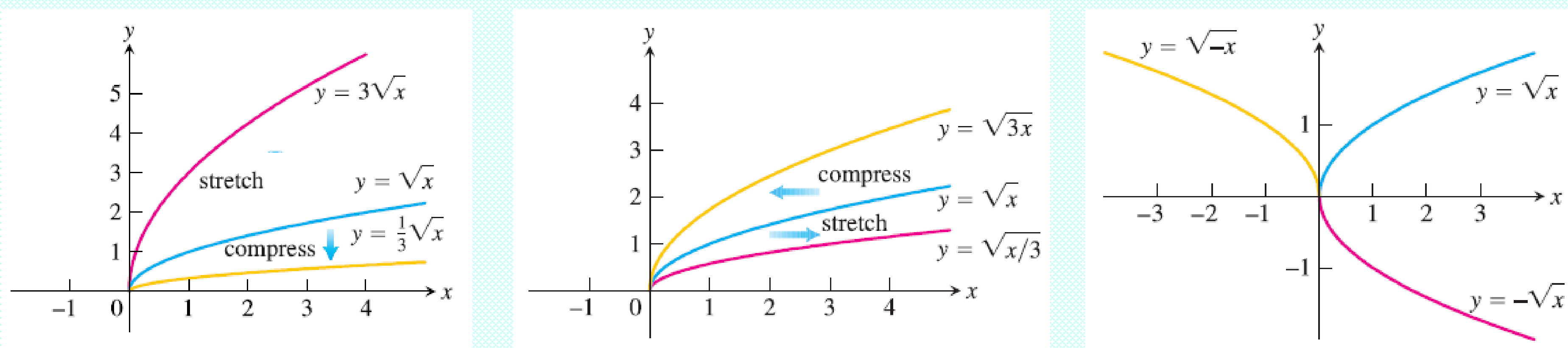
  $y = f(cx)$ Pemampatan grafik f pada arah horizontal dengan faktor c.

  $y = f\left(\frac{x}{c}\right)$ Peregangan grafik f pada arah horizontal dengan faktor c.

- **Untuk $c = -1$, berlaku sifat-sifat berikut:**

  $y = -f(x)$ Pencerminan grafik f terhadap sumbu x.

  $y = f(-x)$ Pencerminan grafik f terhadap sumbu y

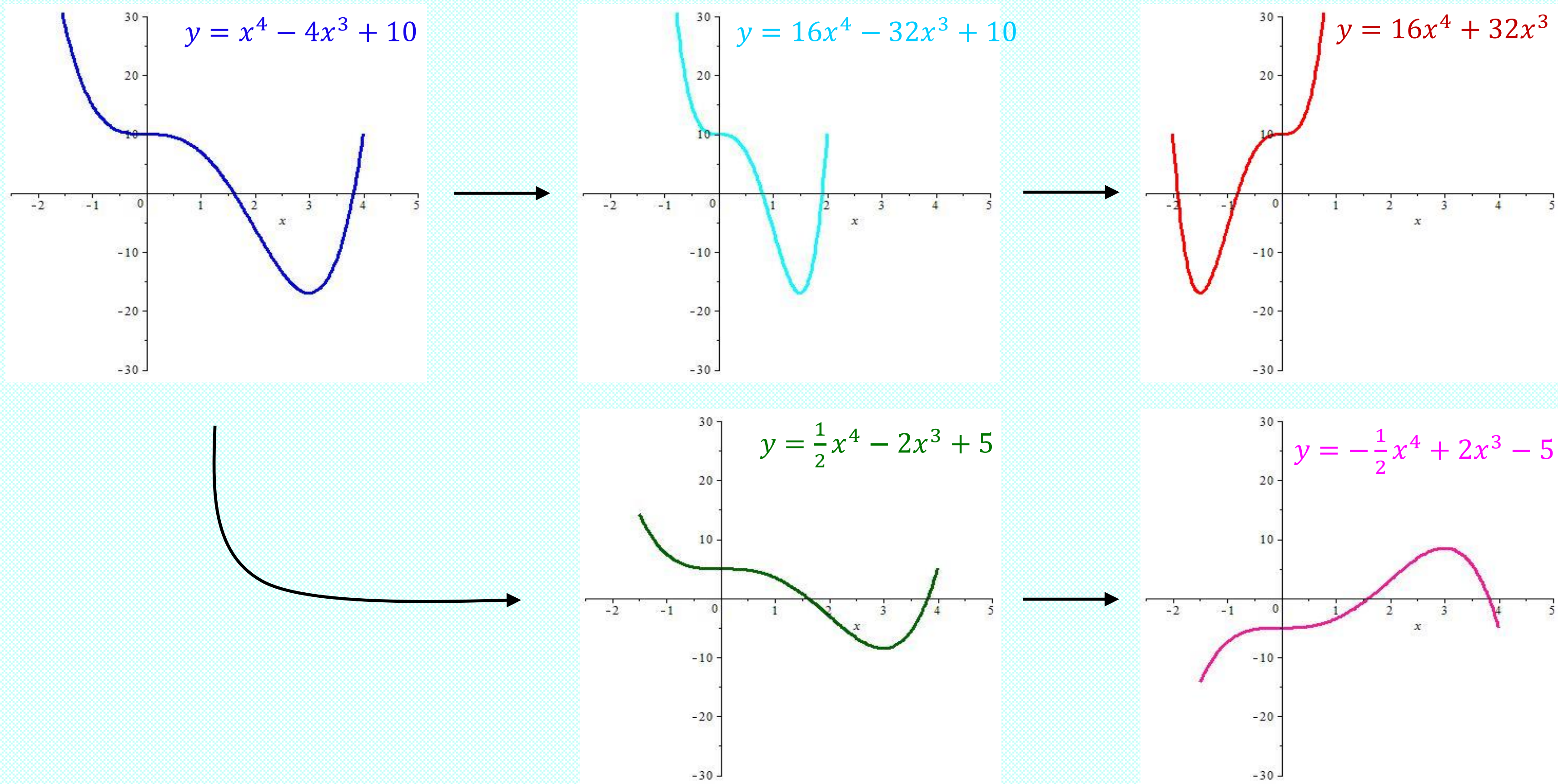


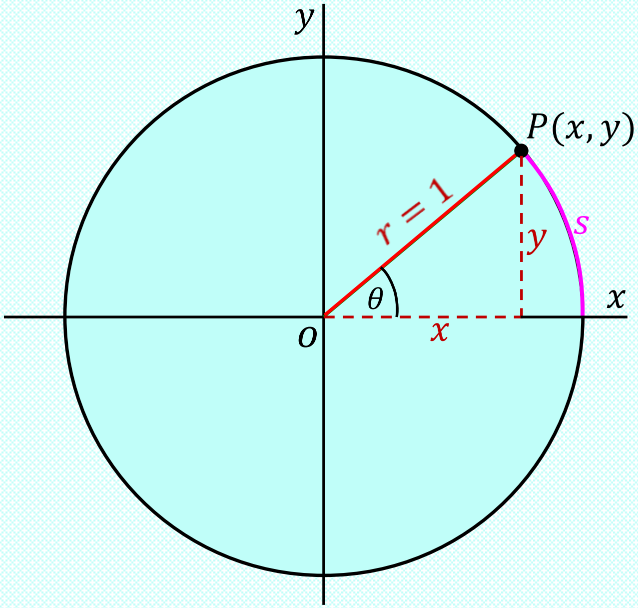
Contoh:

Misalkan $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$. Tentukan formula dan gambarkan grafiknya bila:

a. Fungsi f dimampatkan secara horizontal dengan faktor 2, kemudian dicerminkan terhadap sumbu y.

b. Fungsi f dimampatkan secara vertical dengan faktor 2, kemudian dicerminkan terhadap sumbu x.





Perhatikan sebuah titik $P(x, y)$ yang terletak pada lingkaran berjari-jari satu. Sudut θ adalah sudut yang dibentuk antara sumbu x positif dengan $\overline{OP}$.

Besar sudut θ didefinisikan sebagai panjang busur s. Satuan sudutnya adalah **radian.**

Bila jari-jari lingkarannya bukan satu, besar sudut θ adalah panjang busur s dibagi r.

Hubungan antara satuan radian dan derajat.

Keliling ⊙ satuan = 2π = sudut sebesar $360°$.

$1° = \frac{\pi}{180}$ radian

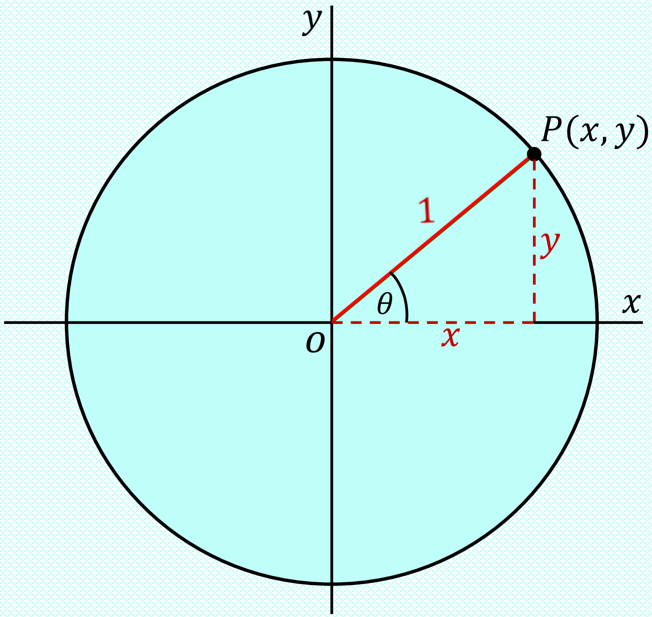
1 radian = $\frac{180°}{\pi} \approx 57{,}296°$

Sebuah sudut dihitung **positif** bila arahnya berlawanan dengan putaran jarum jam dan dihitung **negative** bila searah putaran jarum jam.

Hubungan satuan derajat dan radian untuk beberapa sudut istimewa

Derajat	$-45°$	$-30°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$
Radian	$-\frac{1}{4}\pi$	$-\frac{1}{6}\pi$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

$\pi = 3.14159265358979323846 26\cdots$



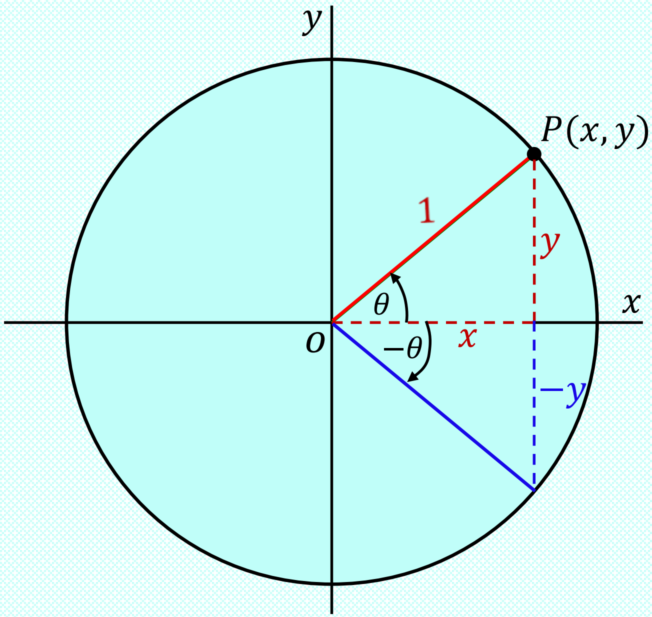
- Fungsi sinus dan cosinus didefinisikan sebagai $f(\theta) \coloneqq \sin\theta = y$ dan $g(\theta) \coloneqq \cos\theta = x$
- Visualisasi dan grafik dari kedua fungsi di atas dapat diamati melalui *hyperlink* berikut Ω Ω
- Nilai ter[illegible] -1, sedangk[illegible]
- $D_f = \cdots$, [illegible] $R_g = \cdots$

- Sudut θ dan $\theta + 2\pi$ menyatakan posi[illegible]erlaku $\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$ dan $\cos(\theta + 2\pi)$ [illegible]periode 2π).

Nilai fungsi sinus dan cosinus untuk bebera[illegible]

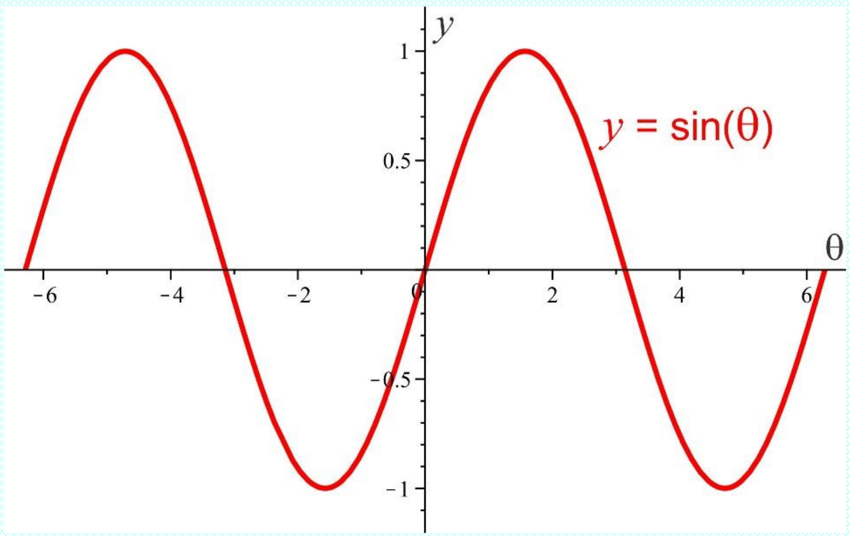
Derajat	$-45°$	$-30°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	[illegible]	$270°$	$360°$
Radian	$-\frac{1}{4}\pi$	$-\frac{1}{6}\pi$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	[illegible]	$\frac{3}{2}\pi$	2π
Sin	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	[illegible]	-1	0
Cos	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	[illegible]	0	1

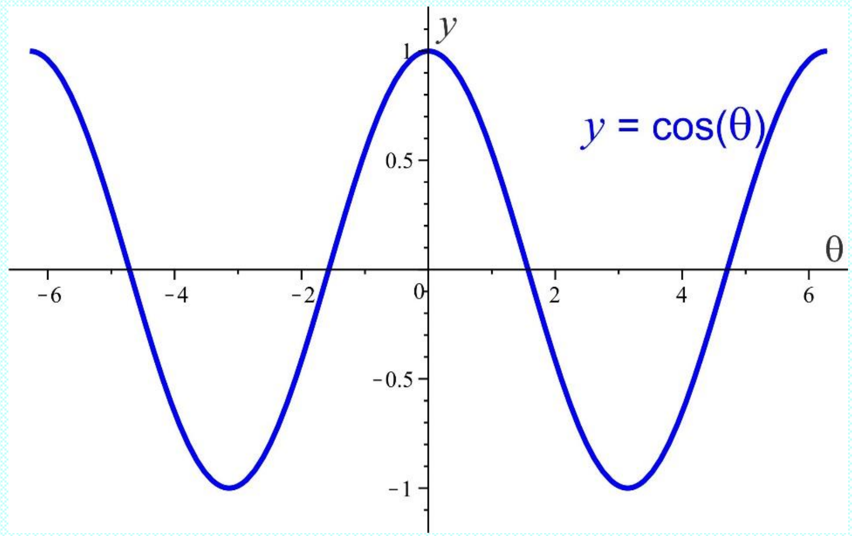
Sifat-sifat Fungsi Sinus dan Cosinus



Berdasarkan gambar di samping, diperoleh:

- $\sin\theta = y$ dan $\sin(-\theta) = -y$.
  Jadi $\sin(-\theta) = \sin\theta$ (fungsi gasal / ganjil)
- $\cos\ \theta = x$ dan $\cos\ (-\theta) = y$.
  Jadi $\cos\ (-\theta) = \cos\ \theta$ (fungsi genap)
- $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

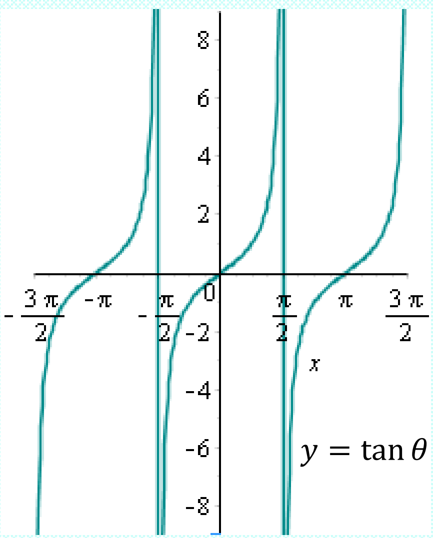


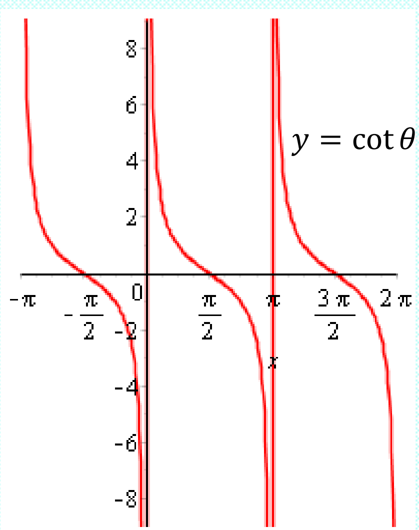


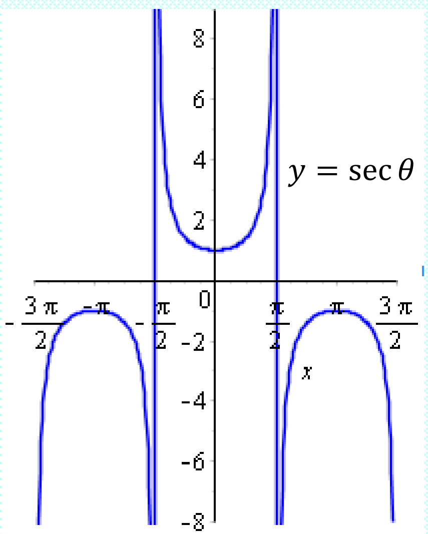
Fungsi Trigonometri Lainnya: Tangen, Cotangen, Secan, Cosecan

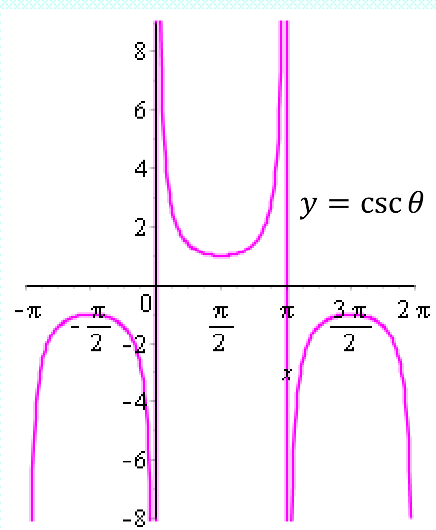
Dari fungsi sinus dan cosinus dibentuk fungsi-fungsi trigonometri lainnya.

Fungsi	Daerah Definisi	Daerah Nilai	Perode
$f(\theta) := \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ Ω	$\{x \mid x \neq \frac{2k+1}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	π
$f(\theta) := \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$	$\{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	π
$f(\theta) := \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ Ω	$\{x \mid x \neq \frac{2k+1}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$	2π
$f(\theta) := \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	$\{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$	2π





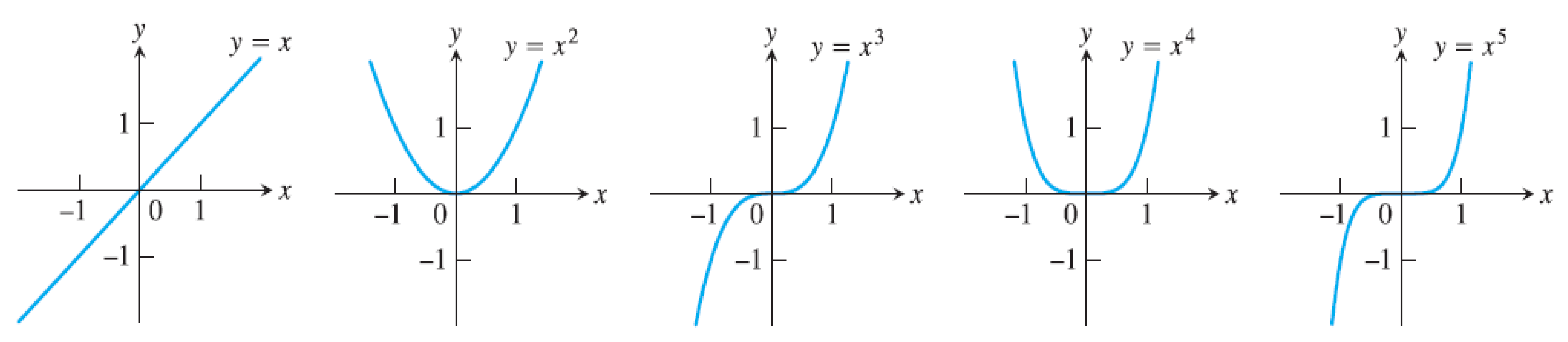




- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $\sin(-\theta) = -\sin\theta, \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$
- $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta, \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$
- $\cos(\theta + \gamma) = \cos\theta\ \cos\gamma - \sin\theta\ \sin\gamma$
- $\sin(\theta + \gamma) = \sin\theta\ \cos\gamma + \cos\theta\ \sin\gamma$
- $\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta), \quad \sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta)$
- $\sin\theta + \sin\gamma = 2\sin\left(\frac{\theta+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\gamma}{2}\right)$
- $\cos\theta + \cos\gamma = 2\cos\left(\frac{\theta+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\gamma}{2}\right)$
- $\cos\theta - \cos\gamma = -2\sin\left(\frac{\theta+\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\gamma}{2}\right)$

Grafik fungsi $y = x^n$ untuk $n = 1, 2, \cdots, 5$

Semakin besar nilai n, maka untuk $-1 < x < 1$, grafik semakin datar mendekati sumbu x dan untuk $|x| > 1$, grafik semakin curam.

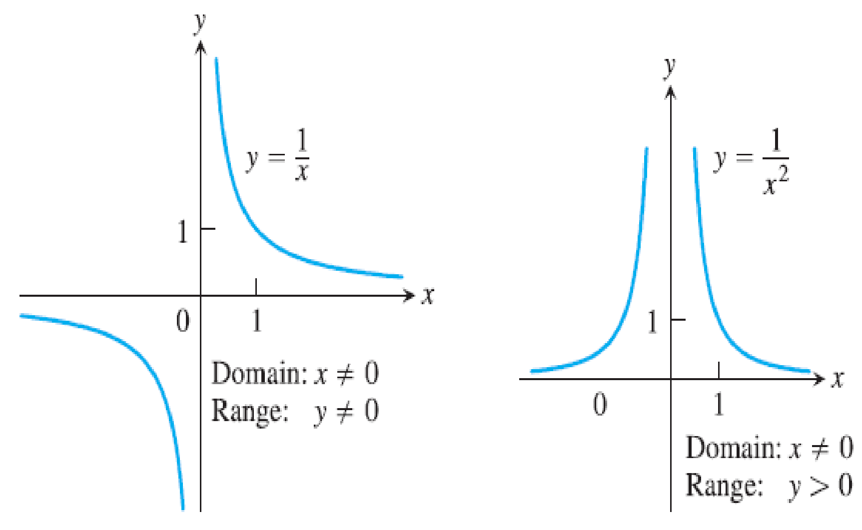


Grafik $f(x) = \frac{1}{x}$ dan $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

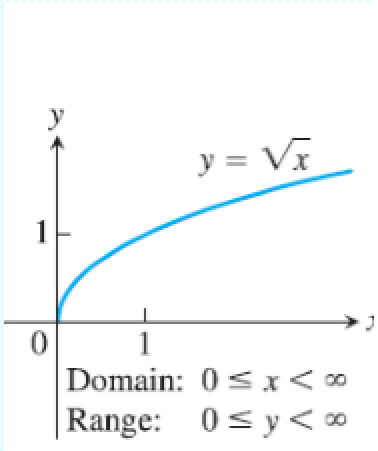
Kedua grafik ini medekati sumbu x untuk $x \to -\infty$ dan $x \to \infty$

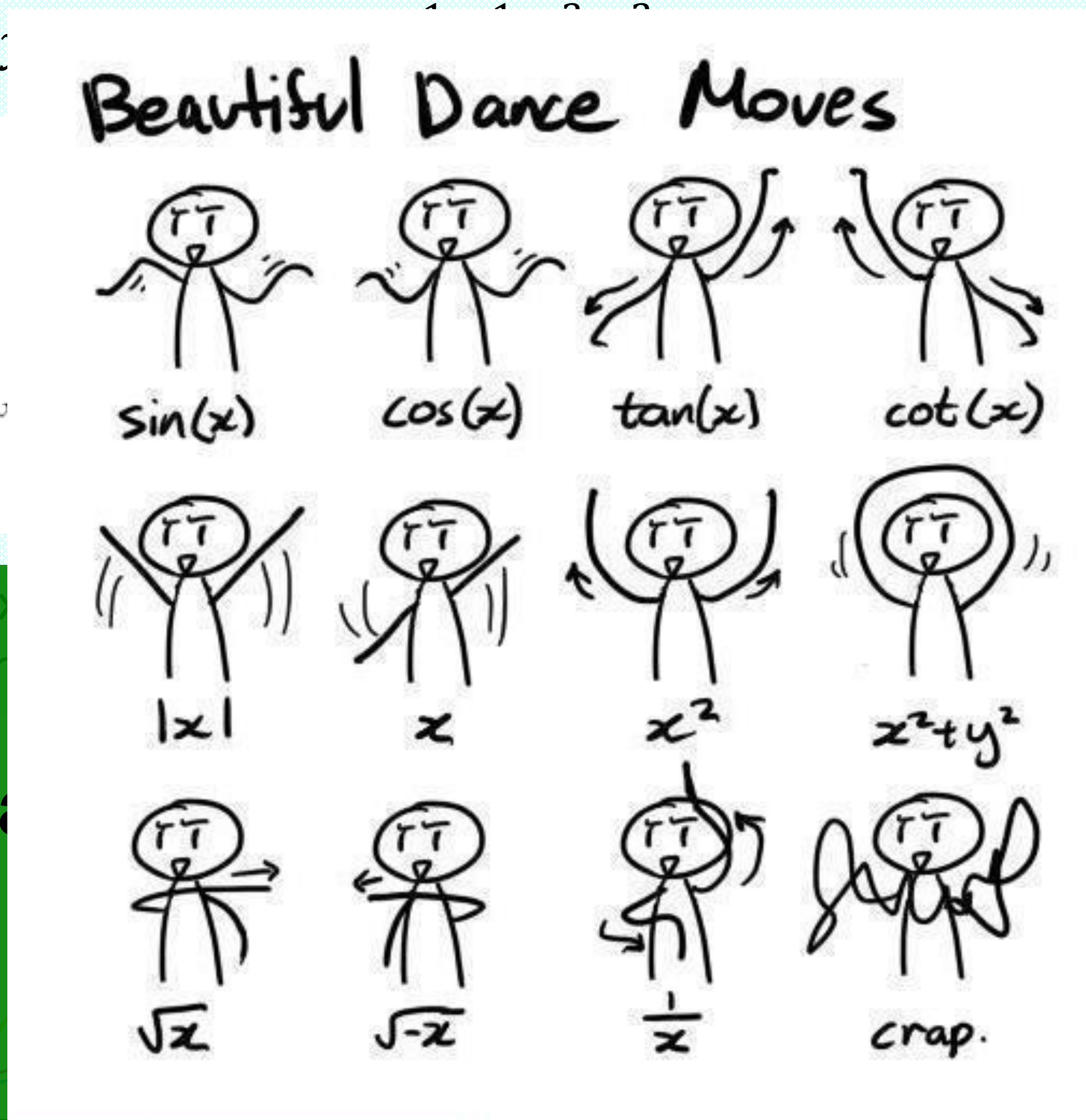
Grafik $f(x)$ simetri terhadap titik asal.

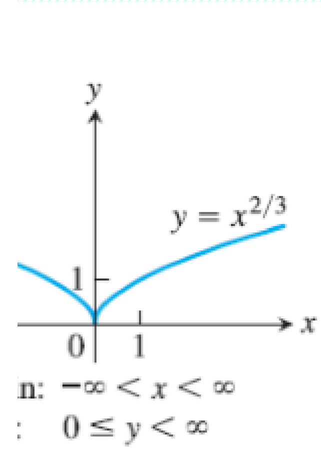
Grafik $g(x)$ simetri terhadap sumbu y



Grafik fungsi



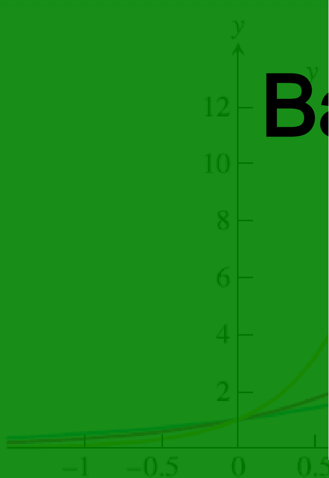


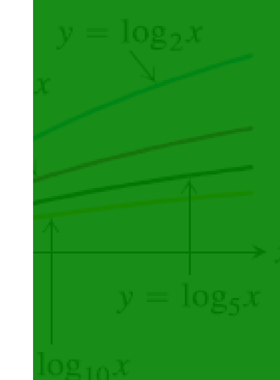


Grafik fungsi ex

Kedua jenis fu ... transenden.

Ba





Eksplorasi dengan Maple (*optional*)

- Maple (*software*) adalah *computer algebra system* yang dikembangkan oleh Maplesoft yang berkedudukan di Waterloo, Ontario, Canada sejak tahun 1980. Pada bulan Maret 2013 telah di-*release* versi 17. Keunggulan dari aplikasi ini adalah kemampuannya melakukan perhitungan matematika secara **simbolik**, meskipun kalkulasi numerik juga difasilitasi.
- Berikut ini disajikan beberapa demo / *worksheet* sederhana yang dapat menuntun anda memahami penggunaan Maple. Untuk menjalankan *hyperlink* di bawah ini, computer anda harus dilengkapi dengan perangkat lunak Maple.

Sekilas tentang Maple Δ

Visualisasi & Animasi Persamaan kuadrat Δ

Mencari Solusi Pertaksamaan Δ

The End Of

CHAPTER 0

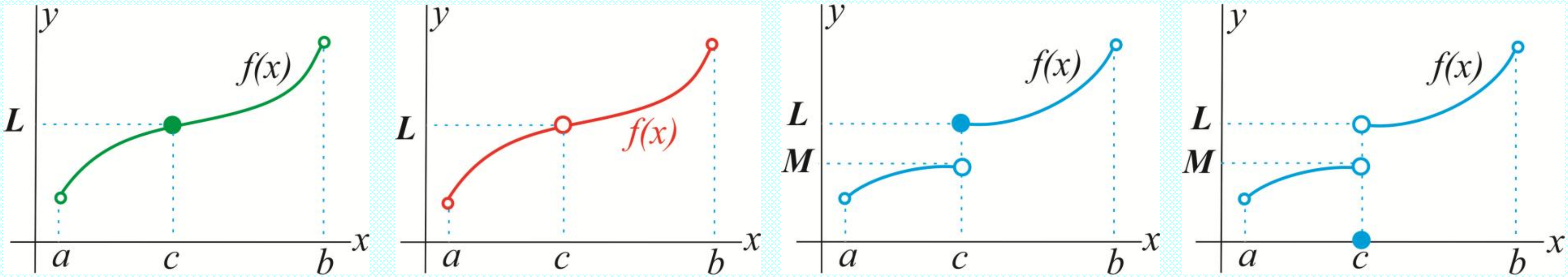
BAB 1

Limit dan Kekontinuan

Pengantar

- Konsep limit merupakan salah satu konsep yang sangat penting dalam disiplin ilmu Kalkulus. Memang tidak banyak masalah real yang langsung berkaitan dengan konsep limit, akan tetapi konsep ini merupakan dasar bagi konsep-konsep selanjutnya seperti konsep turunan, konsep integral, konsep deret dan lain-lain, yang memiliki banyak aplikasi nyata .
- Pengkajian konsep ini secara formal cukup sukar, memerlukan daya abstraksi yang cukup rumit. Untuk mengatasi hal itu, maka pembahasannya akan diawali dengan pendekatan intuitif dilengkapi ilustrasi gambar. Setelah itu baru dilakukan kajian secara formal.

- Masalah limit fungsi adalah masalah menentukan "**kecendrungan nilai fungsi**", bila variabel bebasnya, x, mendekati titik c tertentu. Ω Ω Ω
- Amatilah gambar-gambar di bawah ini, lalu tentukan "nilai limitnya", yaitu kecendrungan nilai $f(x)$ bila titik x mendekati c.

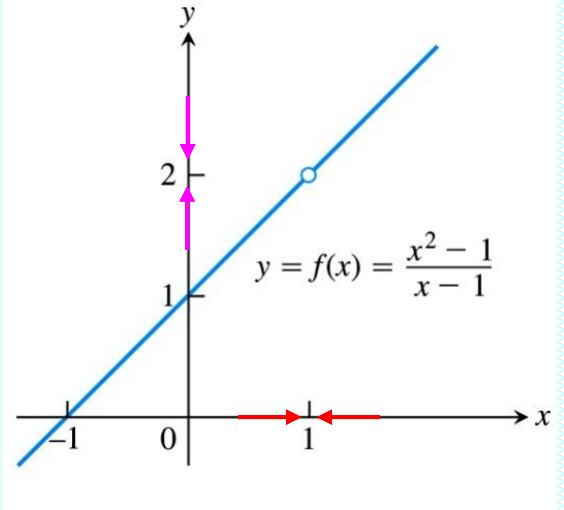


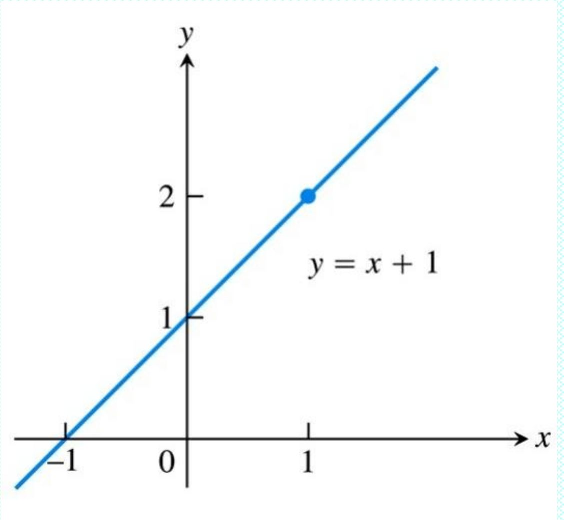
- Misalkan $f(x)$ fungsi yang terdefinisi pada **interval buka yang memuat titik c, kecuali mungkin di titik c**. Bila untuk **semua** titik x yang "dekat" dengan c, berakibat nilai $f(x)$ "dekat" ke nilai L, dikatakan **limit $f(x)$ untuk x mendekati c adalah L,** dinotasikan $\lim_{x \to c} f(x) = L$
- Perhatikan bahwa **perhitungan nilai limit dan perhitungan nilai fungsi merupakan dua hal yang berbeda**. Hasilnyapun bisa sama, bisa berbeda, bahkan bisa pula tidak ada.

Contoh (Thomas' Calculus 10^{th} ed. , page 46, example 1)

Tentukan $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

- Perhatikan fungsi $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ terdefinisi pada seluruh garis real, kecuali pada $x = 1$.
- $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1, \ \ x \neq 1$
- Untuk $x \neq 1$, grafik $f(x)$ sama dengan grafik $y = x + 1$
- Dari grafik tersebut terlihat untuk $x \to 1$, $f(x) \to 2$.
- Hal ini juga dapat diamati dari tabel berikut:





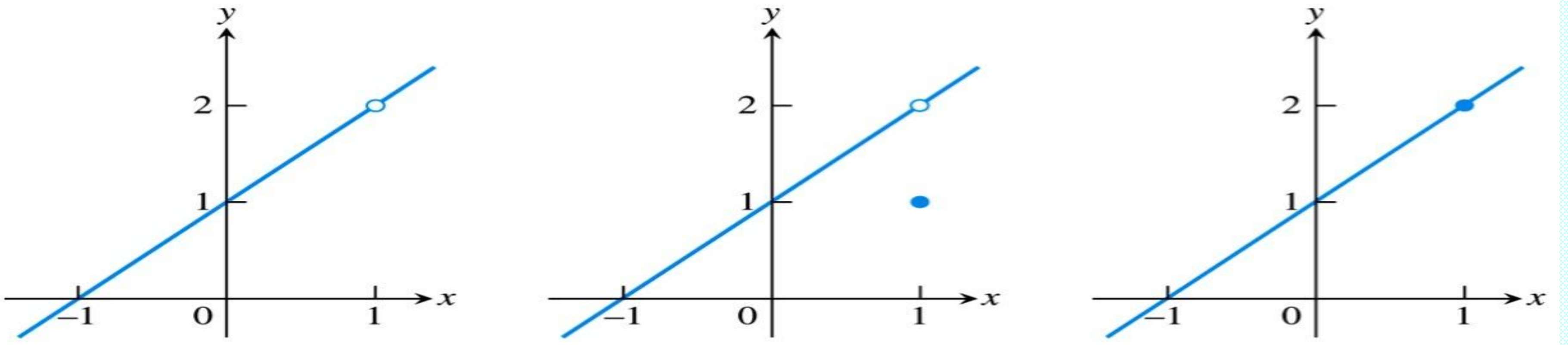
x	0,9	0,99	0,999	0,9999	⋯	**1**	⋯	1,0001	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	1,9	1,99	1,999	1,9999	⋯	X	⋯	2,0001	2,001	2,01	2,1

- Kesimpulan $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$
- Catatan: Pada soal ini $f(1)$ tidak ada tapi limitnya di $x = 1$ ada.

Diberikan tiga fungsi $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$, dan $h(x) = x + 1$.

Tentukan limit dari masing-masing fungsi tersebut untuk $x \to 1$.

- Grafik dari ketiga fungsi tersebut disajikan di bawah ini



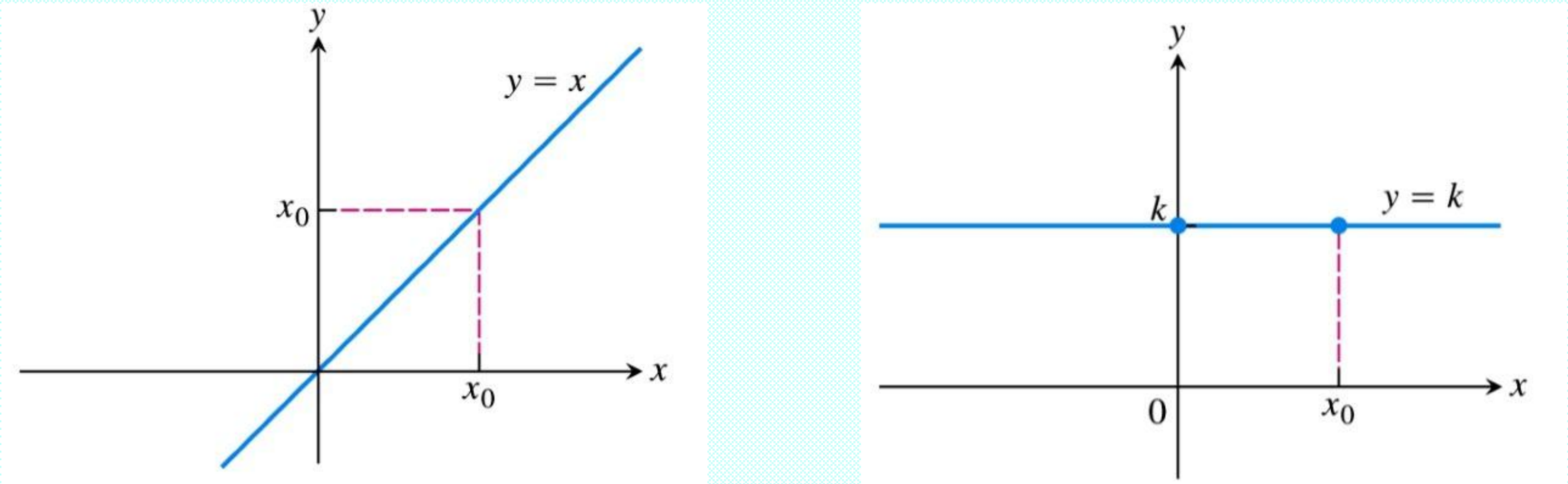
(a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ (b) $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ (c) $h(x) = x + 1$

- Pada soal ini $f(1)$ tidak ada, $g(1) = 1$, dan $h(1) = 2$
- Meskipun nilai fungsinya di titik $x = 1$ berbeda-beda, tetapi nilai limitnya semua sama, yaitu 2.

Teorema:

- Misalkan f fungsi indentitas, $f(x) = x$, maka $\lim_{x \to x_0} f(x) = \mathbf{\lim_{x \to x_0} x = c}$, $c \in \mathbb{R}$
- Misalkan f fungsi konstan, $f(x) = k$, maka $\lim_{x \to x_0} f(x) = \mathbf{\lim_{x \to x_0} k = k}$, $c \in \mathbb{R}$

Visualisasi dari teorema di atas dapat dilihat pada gambar berikut:

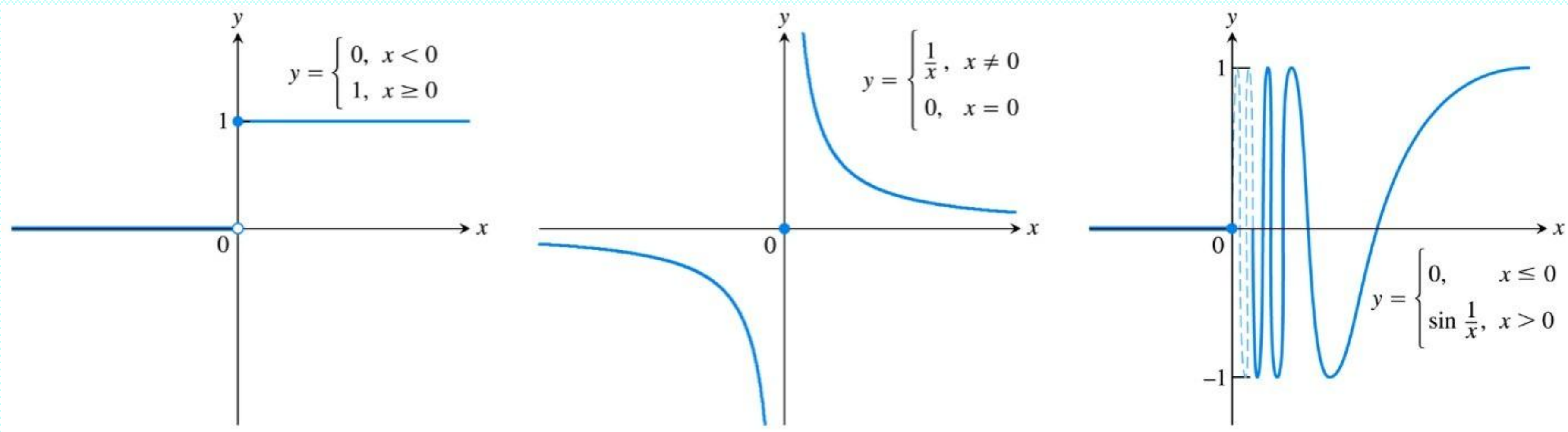


(a) Identity function

(b) Constant function

Perhatikan gambar dari tiga fungsi berikut:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}, \qquad \mathrm{g}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \qquad \mathrm{h}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin\frac{1}{x}, & x = 0 \end{cases}$$



Pada masing-masing fungsi tersebut, $f(0) = 1$, $g(0) = 0$, dan $h(0) = 0$, tetapi ketiga fungsi tersebut tidak mempunyai limit di $x = 0$.

Teorema Limit

Misalkan $\lim_{x\to c} f(x) = L$, $\lim_{x\to c} g(x) = M$, dan $c, k \in \mathbb{R}$.

a. $\lim_{x\to c}(f+g)(x) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + M$

b. $\lim_{x\to c}(f-g)(x) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L - M$

c. $\lim_{x\to c}(kf)(x) = k \lim_{x\to c} f(x) = k\,L$

d. $\lim_{x\to c}(fg)(x) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = LM$

e. $\lim_{x\to c}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \frac{L}{M}$

f. $\lim_{x\to c} f^n(x) = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)^n = L^n$

g. $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f}(x) = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, dengan syarat $\lim_{x\to c} f(x) \geq 0$ untuk n genap

h. Misalkan $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$

$$\lim_{x\to c} p(x) = p(c) = a_0 + a_1c + a_2c^2 + \cdots + a_nc^n$$

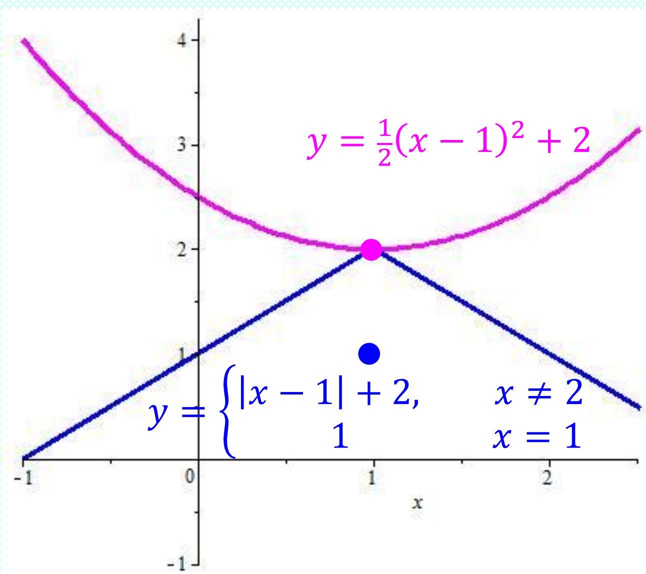
i. Misalkan $p(x)$ dan $q(x)$ polinom dengan $q(c) \neq 0$, $\lim_{x \to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)}$

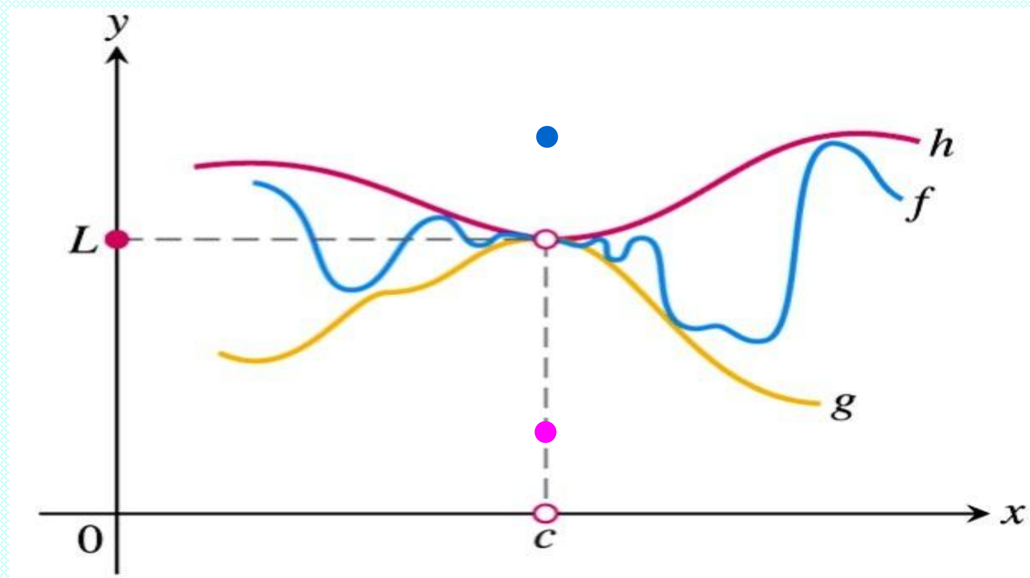
j. Jika $f(x) < g(x)$ maka $\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x)$

k. Prinsip Apit / Sandwich Theorem

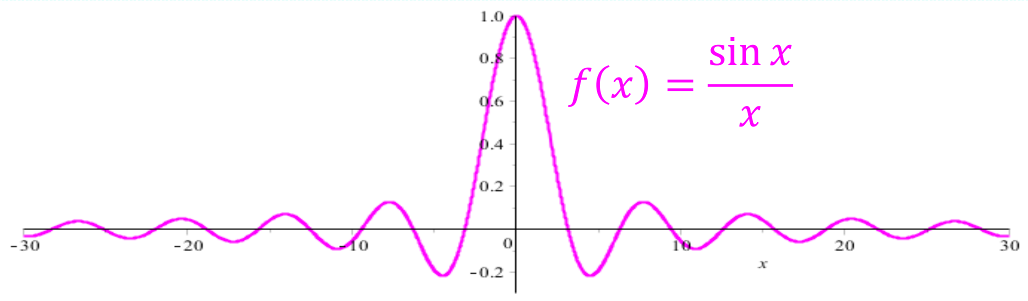
Misalkan f, g, dan h tiga buah fungsi dengan $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ untuk suatu interval buka I yang memuat c, kecuali mungkin di c.

Bila $\lim_{x \to c} g(x) = L$ dan $\lim_{x \to c} g(x) = L$ maka $\lim_{x \to c} f(x) = L$ $\underline{\Delta}$





Teorema Limit Fungsi Trigonometri



a. $\lim_{x \to c} \sin x = \sin c$

b. $\lim_{x \to c} \cos x = \cos c$

c. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ Δ, tetapi hati-hati, bila $c \neq 0$, $\lim_{x \to c} \frac{\sin x}{x}$ belum tentu 1

d. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

e. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

f. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

- $\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = 1$
- $\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x-1)^2}{(x-1)^2} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x-1)}{x-1}$ bukan 1 melainkan $\frac{\sin(-1)}{-1}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ bukan 1

Latihan Soal-Soal Limit

Hitung limit-limit berikut dan jelaskan keabsahan pada tiap langkahnya.

1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^4-3x}{3x^2-5x+7}$ Ψ

2. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$ Ψ

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3+3x^2-2x-3}{x^2-1}$ Ψ

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin(2x)}{2x+\tan x}$ Ψ

5. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pi} \left(x-\frac{1}{2}\pi\right)\tan(3x)$ Ψ

6. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1+\cos x}{\sin(2x)}$ Ψ

7. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ Ψ

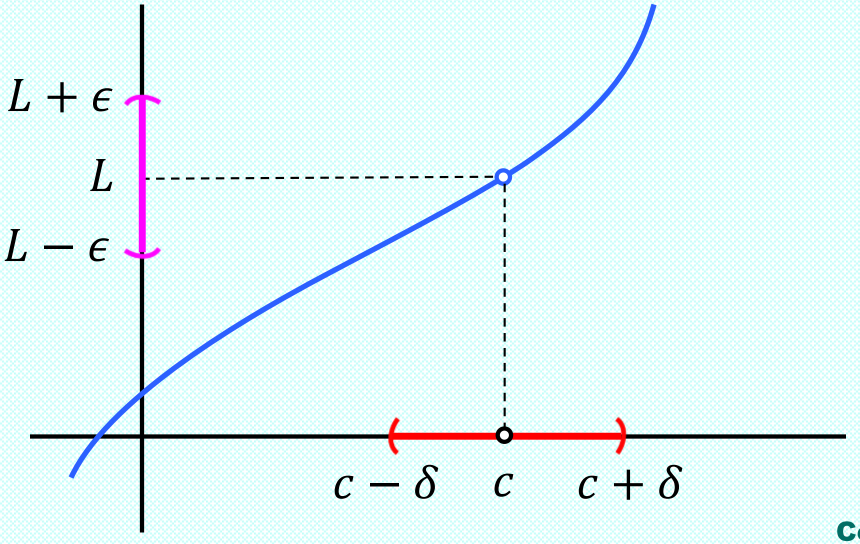
8. $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ Ψ

Pembahasan limit secara formal matematika merupakan salah satu topik yang **sangat sangat sangat sulit** untuk dicerna. Namun demikian, konsep ini merupakan bagian yang **sangat penting**. Mengapa penting? Karena dengan konsep ini kita dapat menjustifikasi kebenaran logika pada rumus-rumus dan perhitungan limit.

Sebelum memasuki pembahasan limit secara formal, anda diharapkan dapat memahami/merasakan/meresapi arti dari notasi berikut,

$$\boldsymbol{0 < |x - c| < \delta} \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{|f(x) - L| < \epsilon}$$

Kedua hal ini diilustrasikan melalui gambar berikut ini:



$$0 < |x - c| < \delta$$
$$\Updownarrow$$
$$c - \delta < x < c + \delta, \quad x \neq c$$

Ilustrasi 1: Konsep Limit Secara Formal

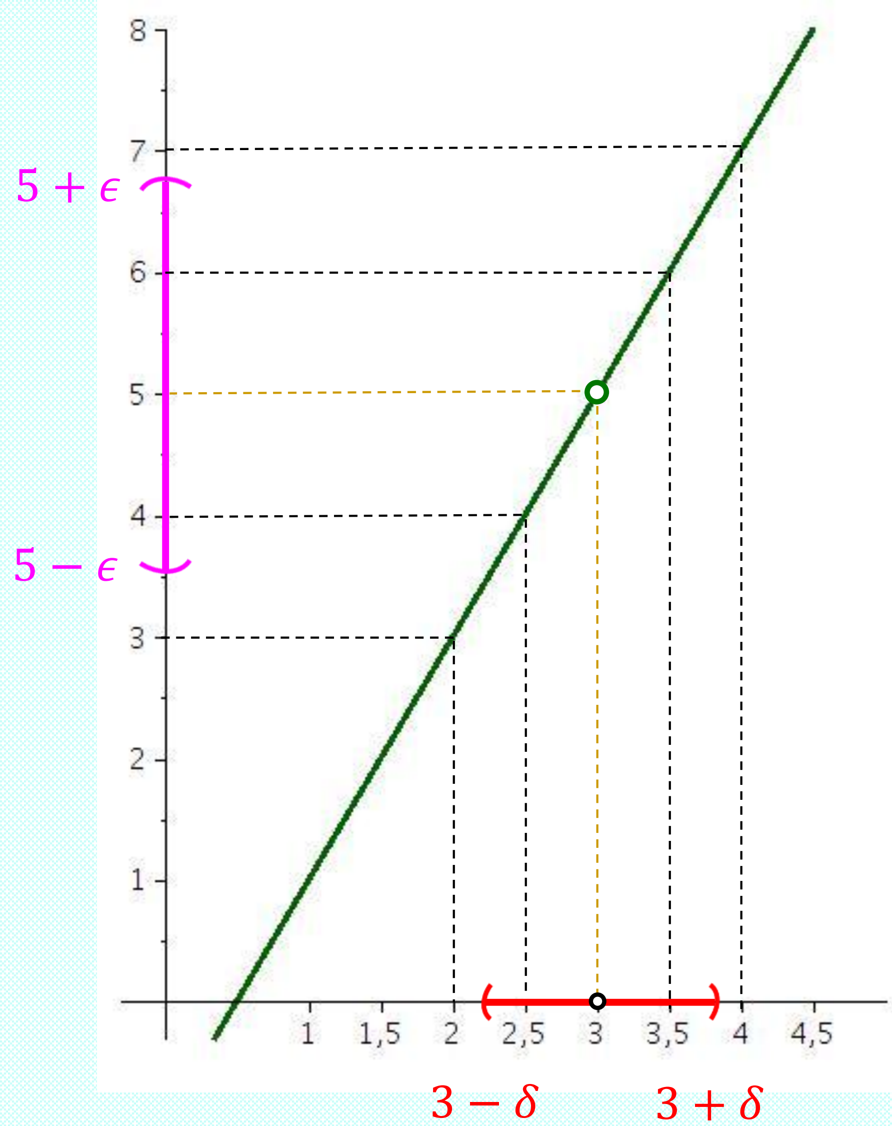
Berikut ini disajikan contoh kalkulasi $\epsilon - \delta$ yang akan mengantarkan kita pada pendefinisian konsep limit secara formal.

Diberikan fungsi $f(x) = 2x - 1,\ \ x \neq 3$

Untuk setiap nilai ϵ pada table di bawah ini, tentukanlah $\delta > 0$, supaya

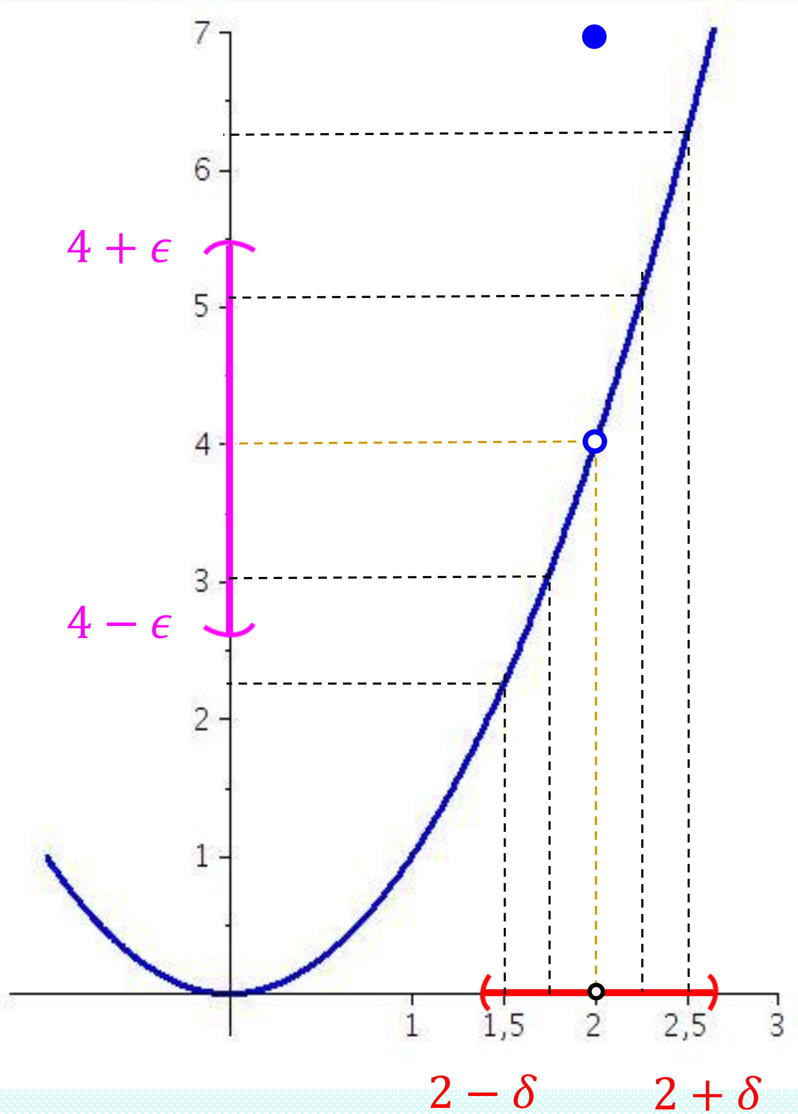
$$0 < |x - 3| < \delta \implies |f(x) - 5| < \epsilon$$

$\boldsymbol{\epsilon}$	$\boldsymbol{\delta}$
1	Δ
0,1	
0,01	
0,001	
0,0001	



Ilustrasi 2: Konsep Limit Secara Formal

Berikut ini disajikan contoh kalkulasi $\epsilon - \delta$ yang akan mengantarkan kita pada pendefinisian konsep limit secara formal.



Diberikan fungsi $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 7, & x = 2 \end{cases}$

Untuk setiap nilai ϵ pada table di bawah ini, tentukanlah $\delta > 0$, supaya

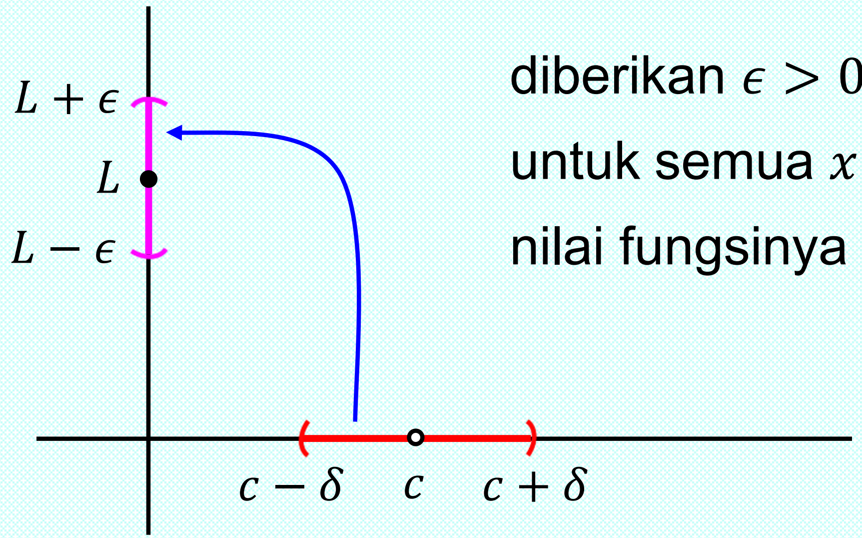
$$0 < |x - 2| < \delta \implies |f(x) - 4| < \epsilon$$

ϵ	δ
1	Δ
0,1	
0,01	
0,001	
0,0001	

Definisi Formal Limit Fungsi

Dua ilustrasi sebelumnya tak lain adalah proses membuktikan $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

Secara umum, proses ini diperlihatkan pada ilustrasi berikut:



diberikan $\epsilon > 0$, dicari $\delta > 0$ supaya

untuk semua $x \in (c-\delta, c+\delta)\backslash\{c\}$,

nilai fungsinya $f(x) \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$

Definisi: Misalkan f fungsi yang terdefinisi pada interval buka I yang memuat titik c, kecuali mungkin di c. Limit dari $f(x)$ untuk x mendekati c disebut L, ditulis $\lim_{x\to c} f(x) = L$, artinya untuk setiap $\epsilon > 0$, dapat dicari $\delta > 0$ sehingga

$$0 < |x-c| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon \quad \underline{\Omega}\,\underline{\Omega}$$

Perlu dipahami bahwa definisi ini **bukan untuk menghitung limit sebuah fungsi**, **tapi untuk menunjukkan bahwa limit yang dihitung tersebut benar**.

Contoh 1, Pembuktian Limit Fungsi

Buktikan $\lim_{x \to 2} 3x + 2 = 8$.

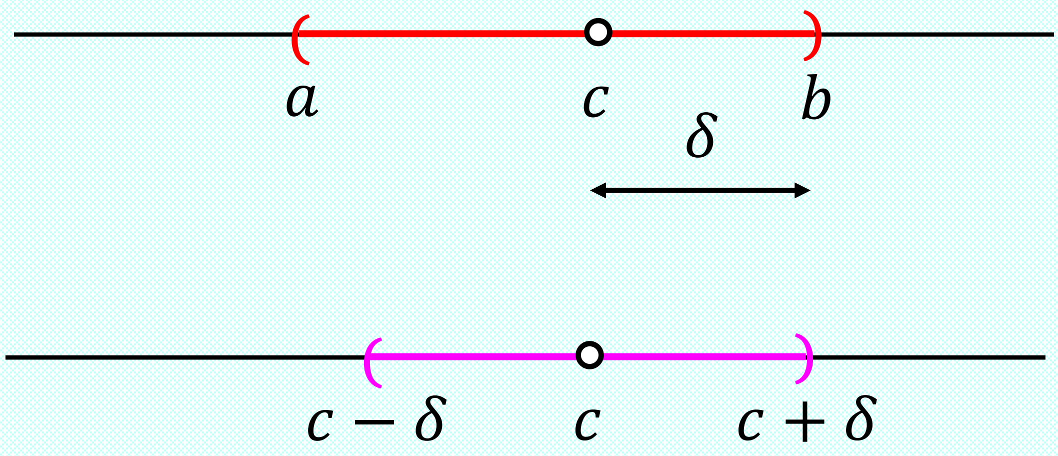
- Tetapkan $\epsilon > 0$, akan dicari $\delta > 0$ sehingga $0 < |x-2| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 8| < \epsilon$
- $$\begin{aligned} |f(x) - 8| < \epsilon &\Leftrightarrow |3x + 2 - 8| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow |3x - 6| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow -\epsilon < 3x - 6 < \epsilon \\ &\Leftrightarrow 6 - \epsilon < 3x < 6 + \epsilon \\ &\Leftrightarrow 2 - \frac{\epsilon}{3} < x < 2 + \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} |f(x) - 8| < \epsilon &\Leftrightarrow -\frac{\epsilon}{3} < x - 2 < \frac{\epsilon}{3} \\ &\Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

Jadi ambil $\delta = \frac{\epsilon}{3}$, maka $0 < |x - 2| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 8| < \epsilon$ dipenuhi.

Dalam pembuktian $\lim_{x \to c} f(x) = L$, kita harus mencari $\delta > 0$ supaya memenuhi $0 < |x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Berikut ini disajikan langkah-langkah umum yang dapat kita lakukan:

1. Selesaikan pertaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$ untuk memeperoleh interval (a, b) yang memuat titik c, dimana semua titik x pada $(a, b)\backslash\{c\}$ memenuhi pertaksamaan tersebut.



2. Tetapkan $\delta = \min\{c - a, b - c\}$, maka setiap titik $x \in (c - \delta, c + \delta)\backslash\{c\}$ akan memenuhi $|f(x) - L| < \epsilon$ (mengapa?)

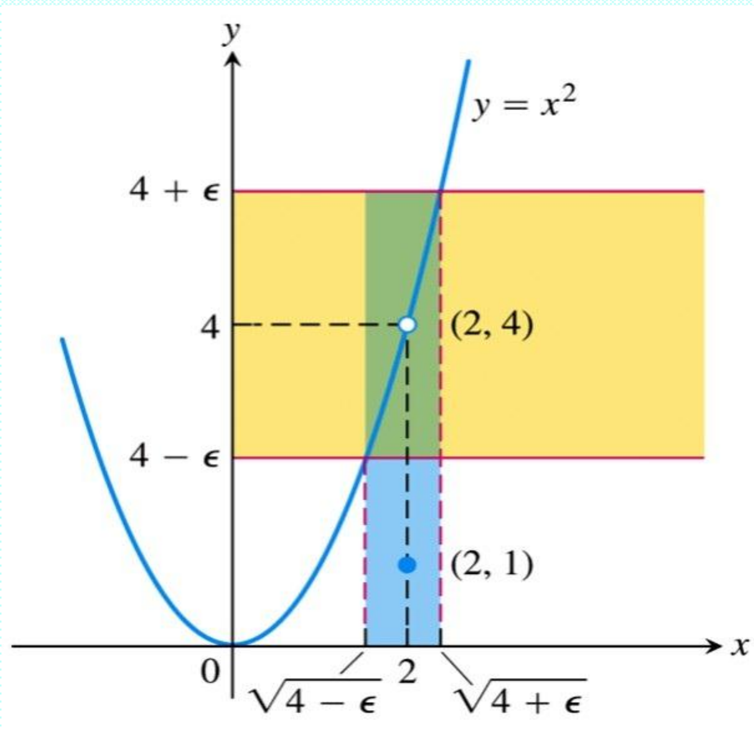
Buktikan $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

- Tetapkan $\epsilon > 0$, akan dicari $\delta > 0$ sehingga $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < \epsilon$
- $|f(x) - 4| < \epsilon \Leftrightarrow |x^2 - 4| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < x^2 - 4 < \epsilon \Leftrightarrow 4 - \epsilon < x^2 < 4 + \epsilon$ (*)

Karena $4 - \epsilon$ bisa negatif, kita bagi kasusnya menjadi dua bagian

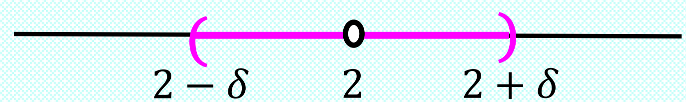
Untuk $\epsilon < 4$, dari (*)

$$|f(x) - 4| \Leftarrow \sqrt{4-\epsilon} < x < \sqrt{4+\epsilon}$$



Kita harus menentukan $\delta > 0$, supaya

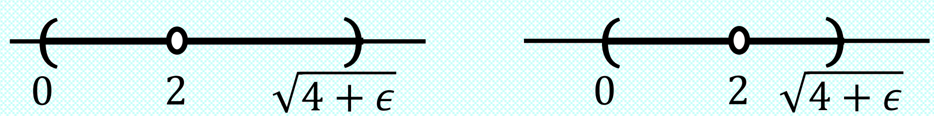
$$(2-\delta, 2+\delta) \subset (\sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon})$$



Ambil $\delta = \min\{2 - \sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon} - 2\}$

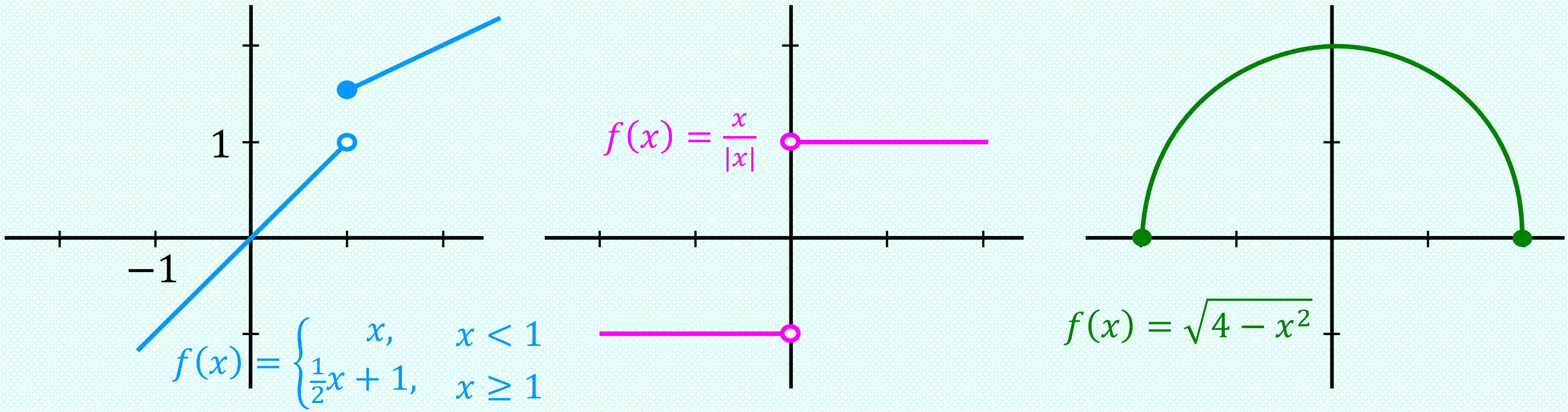
Untuk $\epsilon \geq 4$, dari (*)

$$|f(x) - 4| \Leftarrow 0 \leq x < \sqrt{4+\epsilon}$$ mengapa?

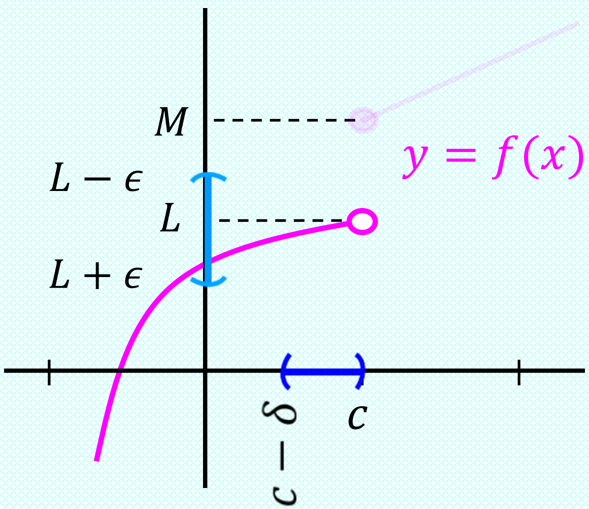


Untuk itu pilih $\delta = \min\{2, \sqrt{4+\epsilon} - 2\}$

Dalam masalah $\lim_{x\to c} f(x)$, kita mengamati perilaku fungsi pada titik-titik x yang ada di kiri dan kanan dari titik c. Dibeberapa masalah kita hanya perlu/dapat melibatkan titik-titik x hanya dari satu sisi saja. Untuk itu diperkenalkan konsep **limit kiri** dan **limit kanan.** Untuk mengkajinya, coba perhatikan gambar berikut.



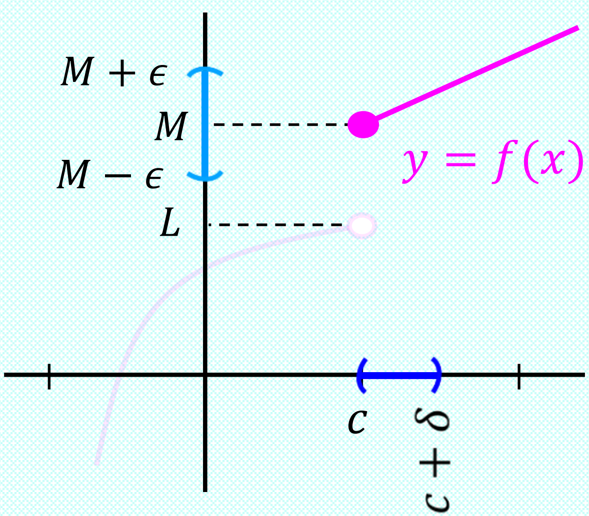
Pada gambar pertama kita lihat kecendrungan nilai fungsi dari kiri dan kanan $x = 1$ berbeda, jadi $\lim_{x\to 1} f(x)$ tidak ada. Tetapi bila diamati hanya dari kiri atau kanan $x = 1$, nilai limitnya ada. Hal yang serupa kita jumpai pada gambar kedua. Pada gambar ketiga, di titik $x = -2$ kita hanya dapat mengamati limit fungsi dari kanan, sedangkan pada $x = 2$, pengamatan limit hanya dapat dilakukan dari arah kiri.



Secara intuitif, limit kiri dari $f(x)$ untuk $x \to c$ merupakan kecendrungan nilai fungsi $f(x)$, bila titik x mendekati c dari arah sebelah kiri c.

Definisi: Fungsi f dikatakan mempunyai **limit kiri** L di titik c, ditulis $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L$, artinya untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$, sehingga

$$c-\delta < x < c \implies |f(x)-L| < \epsilon \quad \underline{\Omega} \quad \underline{\Omega}$$



Dengan cara sama, limit kanan dari $f(x)$ untuk $x \to c$ merupakan kecendrungan nilai fungsi $f(x)$, bila titik x mendekati c dari arah sebelah kanan c.

Definisi: Fungsi f dikatakan mempunyai **limit kanan** M di titik c, ditulis $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = M$, artinya untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$, sehingga

$$c < x < c+\delta \implies |f(x)-L| < \epsilon \quad \underline{\Omega} \quad \underline{\Omega}$$

Teorema (dibuktikan berdasarkan konsep limit sepihak):

- $\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \lim_{x\to c^-} f(x) = L$ dan $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$
- $\lim_{x\to c} f(x) = L \implies \lim_{x\to c} |f(x)| = |L|$
- $\lim_{x\to c} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to c} |f(x)| = 0$

Latihan

Hitung limit-limit berikut ini

1. (a) $\lim\limits_{x \to 1} |x^2 - 1|$ ψ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{|x|}$ ψ (c) $\lim\limits_{x \to 1} \lfloor x \rfloor$ ψ (d) $\lim\limits_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2}$

2. $$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 1 \\ x + 1, & 1 \le x < 2 \\ 4, & x = 2 \\ 3x - 3, & x > 2 \end{cases}$$

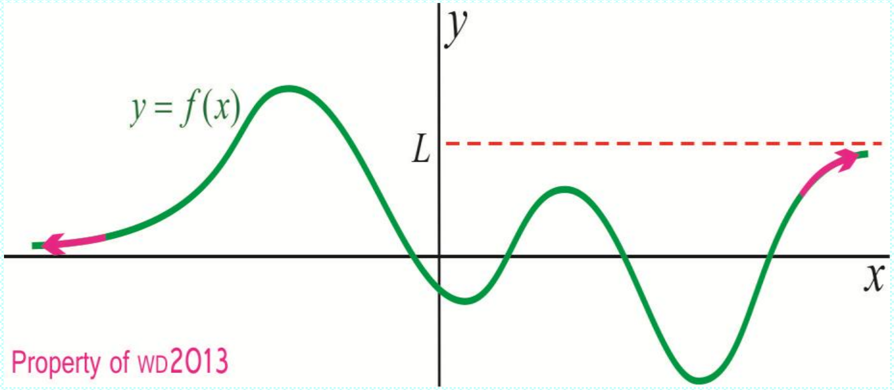
   Gambarkan grafik $f(x)$, lalu hitung: ψ

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ (d) $\lim\limits_{x \to 2{,}001} f(x)$

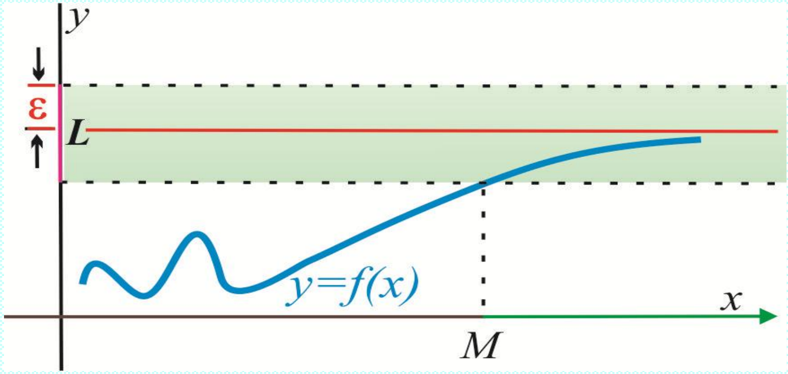
3. Misalkan f fungsi yang terdefinisi pada interval $I = (-a, a)$ dan $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| < 1$ untuk semua $x \in I \backslash \{0\}$. Hitung $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ψ

Pada bagian ini dikaji perilaku fungsi bila variabel $x \to +\infty$ atau $x \to -\infty$.

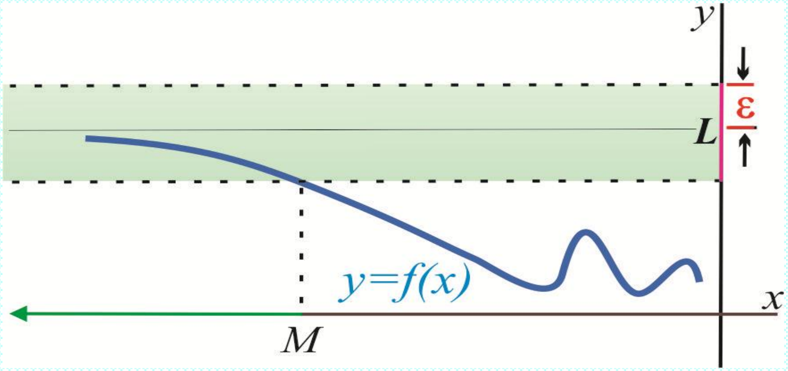
Perhatikan grafik fungsi f di samping. Untuk $x \to +\infty$, grafik makin mendekati garis merah $y = L$. Dalam matematika dikatakan $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$. Hal yang sama, untuk $x \to -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.



Definisi: Misalkan f terdefinisi pada $[c, \infty)$. Limit dari f untuk x menuju ∞ disebut L, ditulis $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, artinya untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat M, sehingga $x > M \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$. Ω Ω



Definisi: Misalkan f terdefinisi pada $(-\infty, c]$. Limit dari f untuk x menuju $-\infty$ disebut L, ditulis $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$, artinya untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat M, sehingga $x < M \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.



Teorema berikut ini merupakan dasar untuk perhitungan limit di takhingga.

Teorema: Misalkan $k \in \mathbb{N}$ maka $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$ dan $\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x^k} = 0$

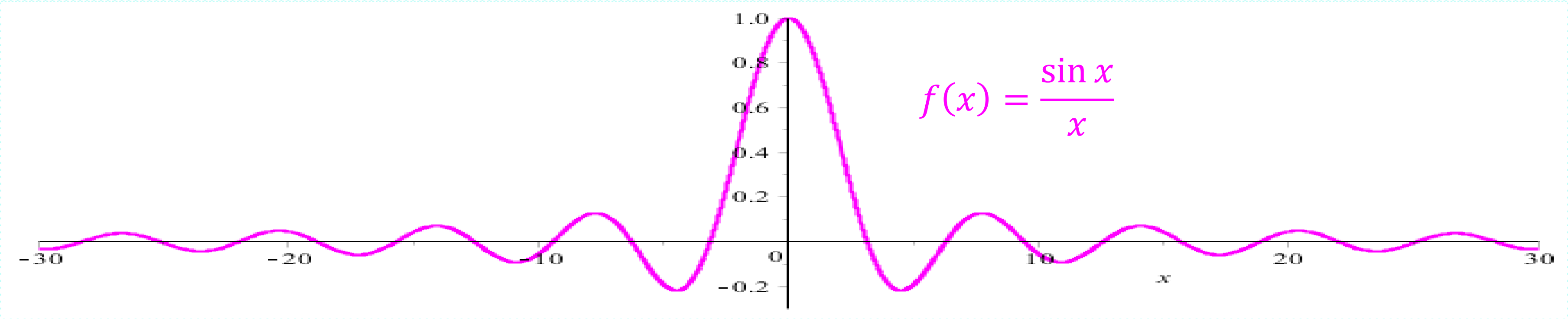
Contoh: Tentukan (a) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{1+x^2}$ Δ (b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3}{1+x^3}$ Δ

Asimptot Datar

Garis $y = L$ disebut asimptot datar dari fungsi f jika memenuhi salah satu dari kondisi berikut, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$ atau $\lim_{x\to \infty} f(x) = L$ Ω Ω

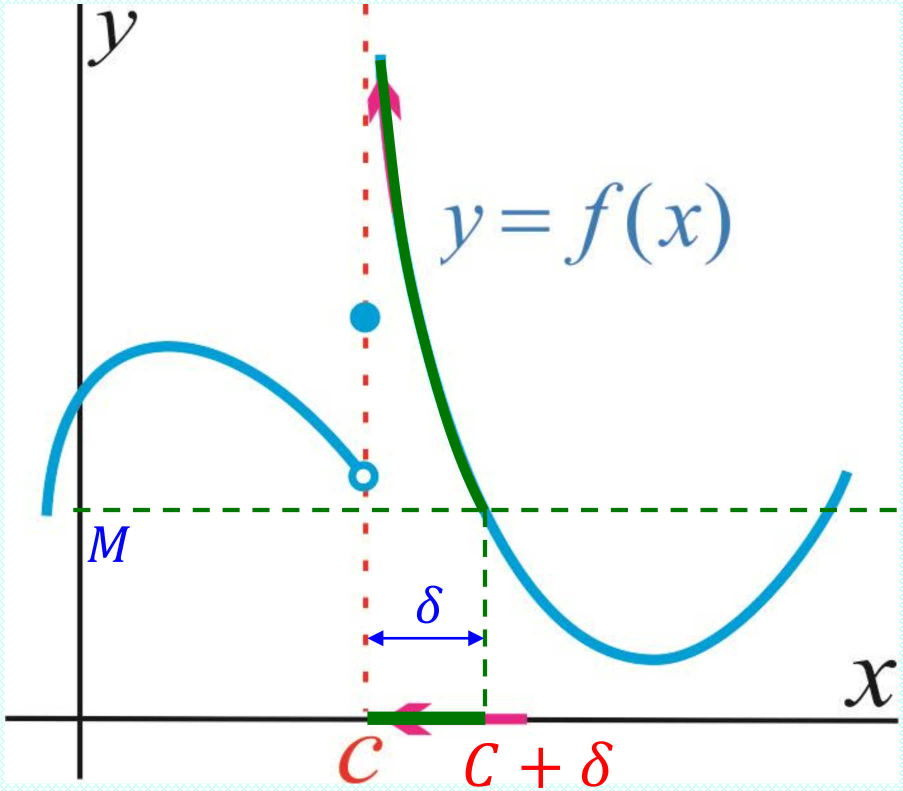
Contoh: Tentukan asimptot-asimptot datar pada dua contoh di atas. Δ Δ

Apakah garis $y = 0$ merupakan asimptot datar dari $f(x) = \frac{\sin x}{x}$? (jelaskan!)



Pada Bagian ini dikaji perilaku fungsi f, di mana $f(x) \to -\infty$ atau $f(x) \to \infty$

Perhatikan grafik fungsi f di samping. Untuk $x \to c^+$, grafik membesar tanpa batas. Dalam bahasa matematika dikatakan $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$.



Definisi: Misalkan f terdefinisi pada interval buka yang memuat titik c. Limit dari f untuk x menuju c dari kanan disebut ∞, ditulis $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \infty$, artinya untuk setiap bilangan M, terdapat $\delta > 0$ sehingga $c < x < c + \delta \Longrightarrow f(x) > M$

Dengan cara sama, tuliskan definisi konsep-konsep berikut:

$\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \infty$ Δ $\quad$ $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = -\infty$ Δ $\quad$ $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = -\infty$ Δ

Perhatikan bahwa konsep limit takhingga definisinya dilakukan secara sepihak.

Berdasarkan teorema limit sepihak, kita peroleh hubungan berikut ini

a. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty \iff \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \infty$ dan $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \infty$

b. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty \iff \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = -\infty$ dan $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = -\infty$

Teorema berikut ini merupakan dasar untuk perhitungan limit di takhingga.

Teorema: Misalkan $k \in \mathbb{N}$ maka

a. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^k} = \infty$ b. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^k} = \begin{cases} \infty, & k \text{ genap} \\ -\infty, & k \text{ gasal} \end{cases}$

Dalam melakukan **perhitungan limit sepihak** dengan bentuk $\lim\limits_{x\to c^+} \frac{g(x)}{h(x)}$, bila $\lim\limits_{x\to c^+} g(x) = k,\ \ k \neq 0$ dan $\lim\limits_{x\to c^+} h(x) = 0$ maka $\lim\limits_{x\to c^+} \frac{g(x)}{h(x)}$ pasti bernilai ∞ / $-\infty$.

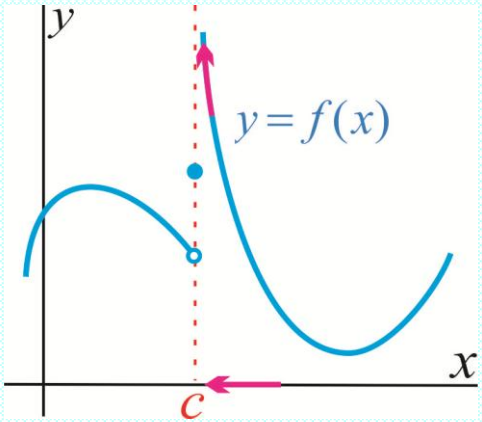
Tanda positif atau negatif ditentukan dari tanda $\frac{g(x)}{h(x)}$ untuk $x \to c^+$.

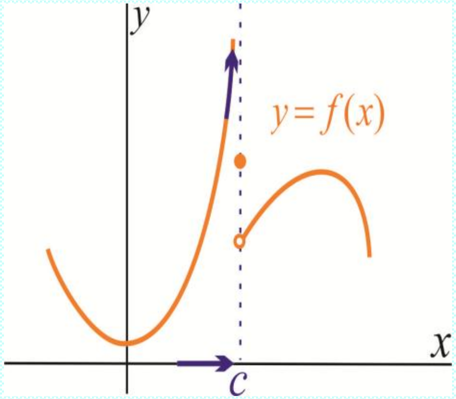
Hal yang sama juga berlaku untuk perhitungan $\lim\limits_{x\to c^-} \frac{g(x)}{h(x)}$

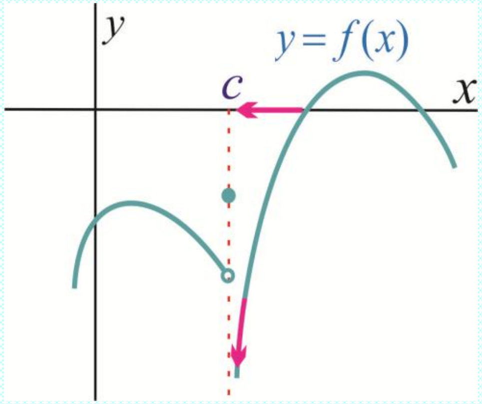
Contoh: Tentukan (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ Δ (b) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x+1}{x^2-5x+6}$ Δ

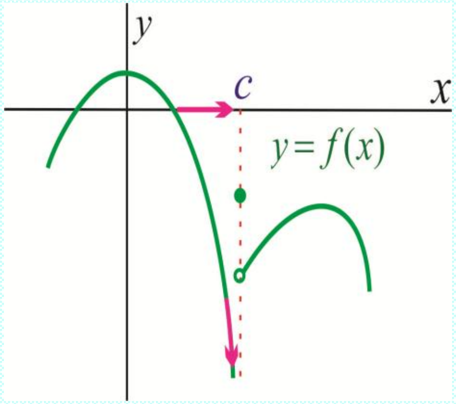
Garis $x = c$ disebut asimptot tegak dari fungsi f jika memenuhi **minimal salah satu** dari kondisi berikut,

a. $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$ b. $\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty$ c. $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$ d. $\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$









Contoh: Tentukan semua simptot tegak dari

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$ Δ

(b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-5x+6}$ Δ

Latihan

1. Tentukan limit-limit berikut:

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3-2x}{x+5}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x\sqrt{x}+3x+1}{x^2-x+11}$

c. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}$ ψ

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}$ ψ

e. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{2x^2+3}-\sqrt{2x^2-5}\right)$

f. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{9x^3+1}{x^2-2x+2}$

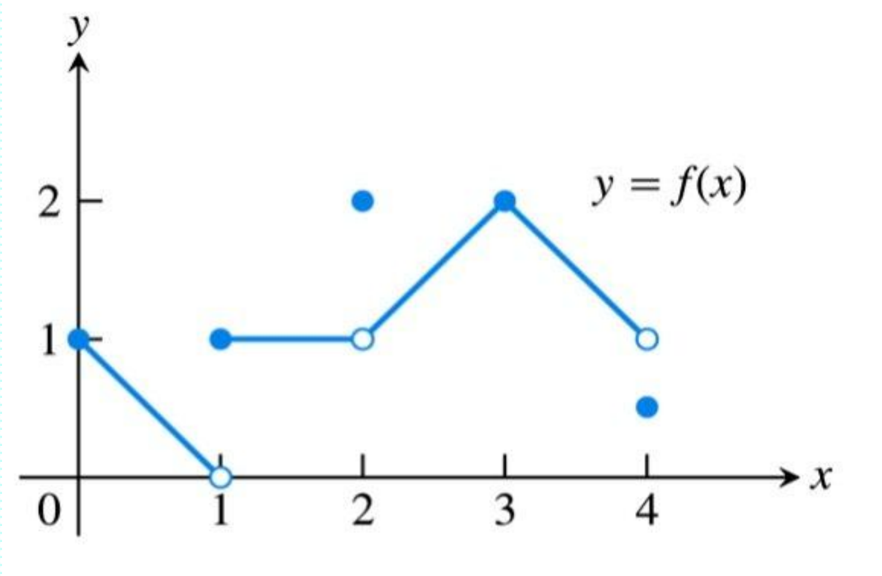
g. $\lim\limits_{x\to\mathbf{3}^+} \frac{3+x}{3-x}$ ψ

h. $\lim\limits_{x\to\mathbf{3}^-} \frac{3+x}{3-x}$ ψ

i. $\lim\limits_{x\to\mathbf{0}^-} \frac{1+\cos x}{\sin x}$

Perhatikanlah grafik fungsi di sebelah.

c	$f(c)$	$\lim_{x\to c} f(x)$
0	1	1 (kanan)
1	1	tidak ada
2	2	1
3	2	2
4	0,5	1 (kiri)



Pada titik $c = 0$ dan 3 nilai fungsi dan nilai limitnya sama. Secara visual, grafik di titik tersebut "menyambung" dengan grafik di titik disekitarnya. Dikatakan fungsi f **kontinu** pada titik-titik tersebut.

Dilain pihak, pada titik-titik $c = 1, 2,$ dan 4, nilai fungsi dan nilai limitnya berbeda. Secara visual, grafik f tidak "menyambung" dengan titik disekitarnya. Dikatakan fungsi f **tidak kontinu (diskontinu)** pada titik-titik tersebut.

Bagaimana kekontinuan untuk titik-titik yang lain sepanjang $(0,4)$?

Definisi: Misalkan $I = [a, b]$ dan $c \in (a, b)$.

- Fungsi f dikatakan **kontinu** di titik c bila $f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$
- Fungsi f dikatakan **kontinu kanan** di titik a bila $f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$
- Fungsi f dikatakan **kontinu kiri** di titik b bila $f(b) = \lim_{x \to b^-} f(x)$

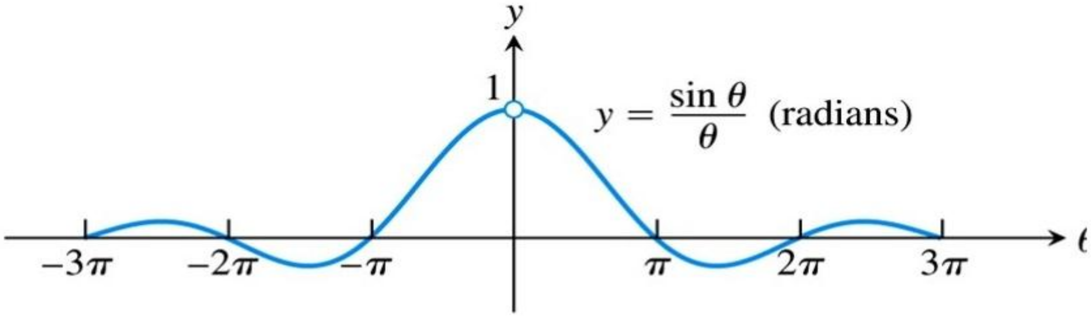
Berikut disajikan prosedur untuk memeriksa kekontinuan fungsi di titik $x = c$,

1. Hitung $f(c)$
2. Hitung $\lim_{x \to c^\wedge -} f(x)$ dan $\lim_{x \to c^+} f(x)$
3. Jika hasilnya sama berarti f kontinu di c.

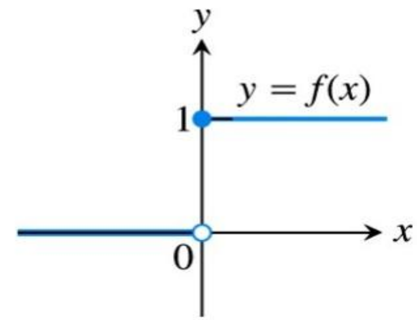
1. Hitung $f(c)$
2. Hitung $\lim_{x \to c^\wedge -} f(x)$ dan $\lim_{x \to c^+} f(x)$
3. Bila hasil ketiganya sama berarti f kontinu di c.

Contoh: Periksa kekontinuan $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}$ di titik $x = 2$ Δ

Beberapa Jenis Kediskontinuan Fungsi



(a)



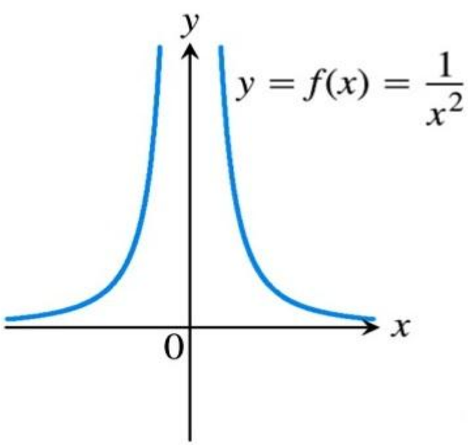
(b)

diskontinu

yang terhapuskan

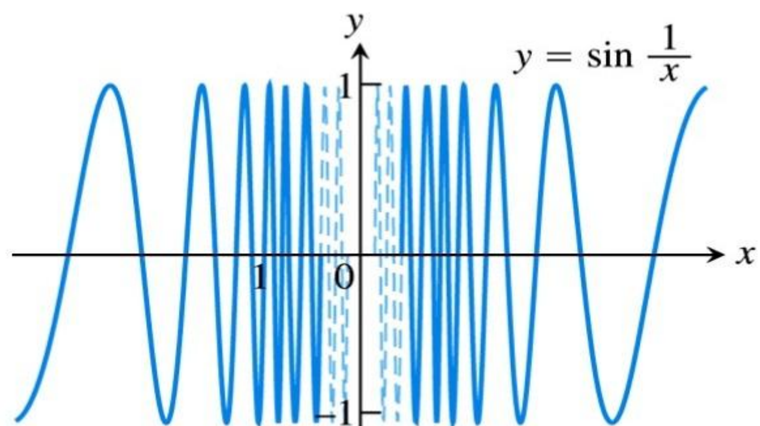
$$f(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\sin\theta}{\theta}, & \theta \neq 0 \\ 1, & \theta = 0 \end{cases}$$

diskontinu loncat / jump discontinuity



(c)

diskontinu takhingga / infinite discontinuity

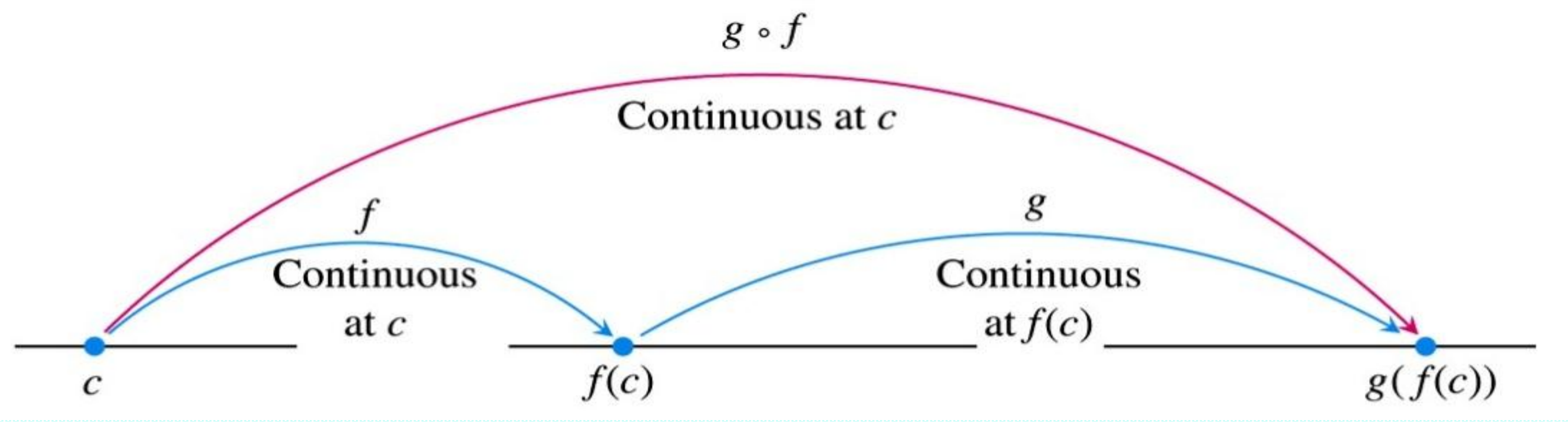


(d)

diskontinu osilasi / oscillating discontinuity

- Polinom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ kontinu diseluruh $\mathbb{R}$
- Fungsi rasional, $\frac{p(x)}{q(x)}$ dengan $p(x)$ dan $q(x)$ polinom, kontinu diseluruh daerah definisinya.
- Fungsi harga mutlak, $f(x) = |x|$, kontinu diseluruh $\mathbb{R}$
- Fungsi akar, $f(x) = \sqrt[n]{x}$ kontinu diseluruh daerah definisinya.
- Misalkan f dan g fungsi-fungsi yang kontinu di titik c, dan $k \in \mathbb{R}$, maka $kf,\ f+g,\ f-g,\ fg,\ \frac{f}{g}$ dengan $g(c) \neq 0, f^n,$ dan $\sqrt[n]{f}$ semuanya kontinu.
- Kokontinuan fungsi komposisi: Misalkan f kontinu di c dan g kontinu di $f(c)$, maka fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ kontinu di c

  Akibat: $\lim_{x\to c} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to c} f(x)\right)$, buktikan!



1. Sketsakan sebuah grafik fungsi yang memenuhi semua sifat berikut:

   a. Daerah definisinya $[-2,4]$

   b. $f(-2) = f(0) = f(1) = f(3) = f(4) = 1$

   c. f kontinu pada D_f kecuali di $-2, 0\ , 3$

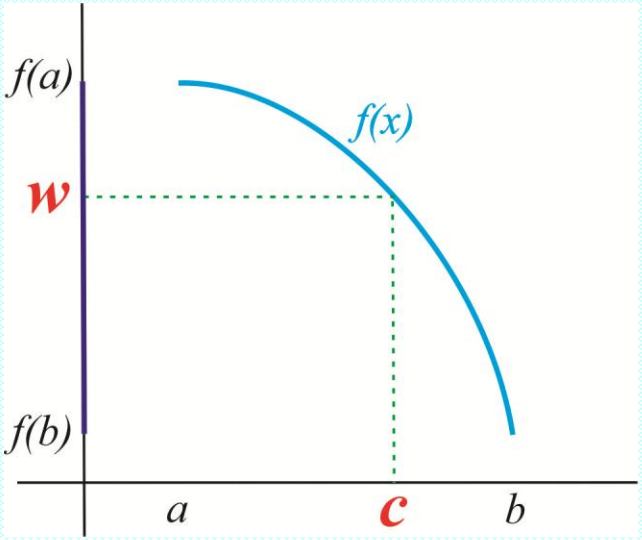
   d. $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$, dan $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 1$ $\underline{\Delta}$

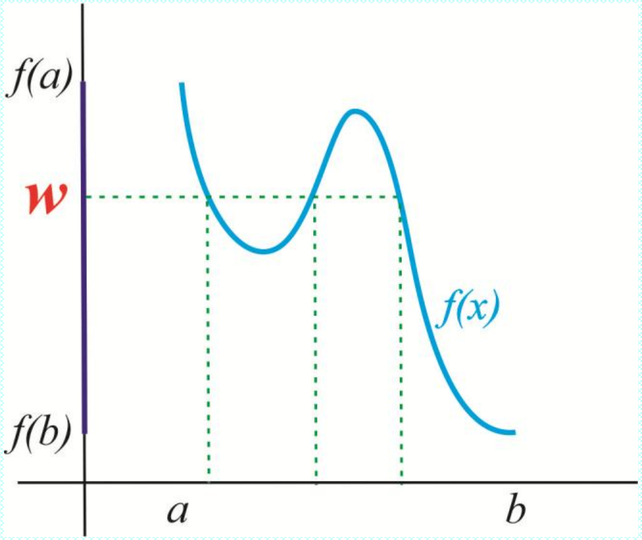
2. Tentukan a dam b agar $f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ ax + b, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$ kontinu diseluruh $\mathbb{R}$ $\underline{\Delta}$

3. Jelaskan mengapa fungsi $h(x) = |x^2 - 3x|$ kontinu di seluruh $\mathbb{R}$

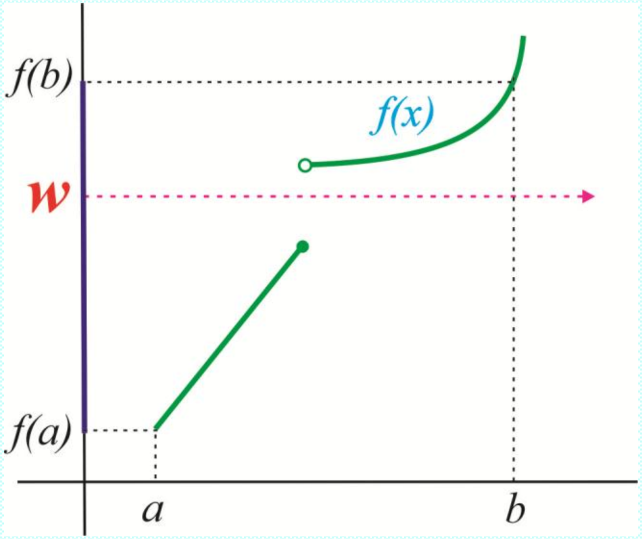
Misalkan f **kontinu** pada interval tutup $[a, b]$. Untuk setiap bilangan w di antara $f(a)$ dan $f(b)$ akan terdapat bilangan $c \in [a, b]$ sehingga $f(c) = w$. Ω

Ilustrasi berikut menggambarkan makna dari teorema di atas.





Titik c yang memenuhi $f(c) = w$ bisa lebih dari satu buah, seperti pada ilustrasi gambar di samping.



Syarat kekontinuan pada teorema di atas sangatlah penting. Bila f tidak kontinu, maka tidak ada jaminan bahwa titik c yang memenuhi $f(c) = w$ ada, lihat ilustrasi di samping.

Aplikasi dari teorema nilai antara dapat dilihat pada soal-soal di halaman berikutnya

Gunakanlah Teorema Nilai Antara untuk menyelesaikan soal-soal di bawah ini.

1. Tunjukkan $p(x) = x^3 + 3x - 2$ mempunyai akar real di antara 0 dan 1. Δ
2. Tunjukkan $p(x) = x^5 + 4x^3 - 7x + 14$ mempunyai minimal satu akar real. ψ
3. Sebuah titik c disebut **titik tetap** bila memenuhi hubungan $f(c)) = c$.
   Jika f kontinu pada $[0,1]$ dengan $0 \leq f(x) \leq 1$, tunjukkan f memiliki titik tetap. Δ
4. Buktikan selalu terdapat dua titik pada cincin kawat melingkar yang temperaturnya sama. *Petunjuk: Gambarkan cincin tersebut pada koordinat kartesius letakkan pusat cincin di* $(0,0)$, *lalu bentuk* $f(\theta)$ *sebagai fungsi dari temperature cincin.* Δ
5. Pada Pk. 4.00 seorang biarawan secara perlahan mendaki gunung Bromo dan tiba dipuncaknya pada sore hari. Keesokan harinya dia mulai menuruni gunung pada Pk 5.00 dan tiba di kaki gunung Pk 11.00. Tunjukkan ada titik pada jalan yang dilaluinya yang menunjukkan jam yang sama saat naik dan turun. ψ

The End Of

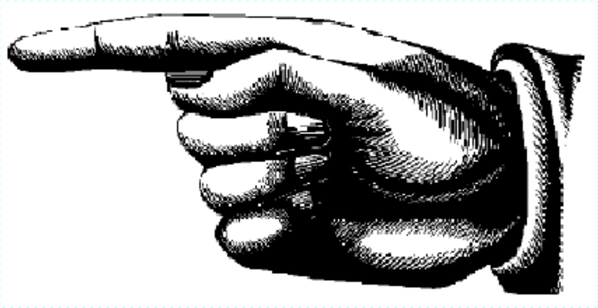
CHAPTER I

BAB 2

Turunan / Derivatif

Pengantar

- Konsep turunan mempunyai aplikasi yang sangat luas baik dibidang sains maupun teknik, misalnya masalah kemiringan garis singgung, masalah kecepatan sesaaat, laju pertumbuhan mahluk hidup, masalah aliran listrik dalam sebuah rangkaian elektronik, masalah gelombang, masalah kecepatan suatu reaksi kimia, dan lain-lain.
- Pembahasan akan dimulai dengan dua ilustrasi, yaitu masalah kecepatan sesaat dan masalah garis singgung pada kurva. Selanjutnya dibahas konsep turunan secara formal matematika, dilanjutkan dengan sifat-sifatnya. Berbeda dengan soal-soal pada konsep limit, pada turunan akan dijumpai banyak sekali problem yang melibatkan masalah real/nyata.



- **Hukum Galileo**: **Jarak tempuh** dari sebuah benda yang jatuh bebas dekat permukaan bumi **sebanding** dengan **kuadrat waktu tempuhnya**.

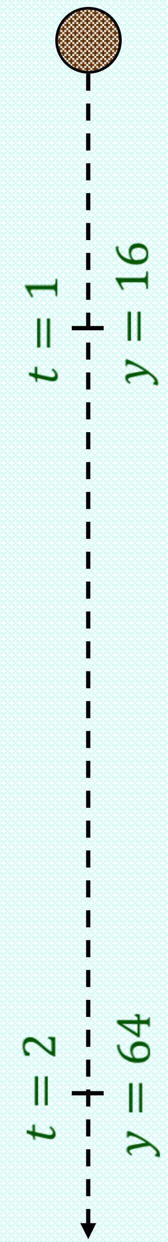
$$y = k \cdot t^2$$ dengan k konstanta yang nilainya "sekitar" 16 Ω

Tabel jarak yang dilalui benda terhadap waktu tempuh						
t	1	1,001	1,01	1,1	1,5	2
y	16	16,032016	16,3216	19,36	36	64

- Kecepatan rata-rata benda antara interval waktu t_0 dan t_1 didefinisikan sebagai $V_{\text{rata}} = \dfrac{y(t_1)-y(t_0)}{t_1-t_0}$

Kecepatan rata-rata antara $t_0 = 1$ dan $t_1 = 1 + \Delta t$						
t_0	1	1	1	1	1	1
t_1	2	1,5	1,1	1,01	1,001	1
V_{rata}	48	40	33,6	32,16	32,016	???

- **Kecepatan sesaat** pada saat t_0 merupakan **kecepatan rata-rata antara t_0 dengan t_0**. Bagaimana cara menghitungnya?



Kecepatan Sesaat sebagai Limit Kecepatan Rata-Rata

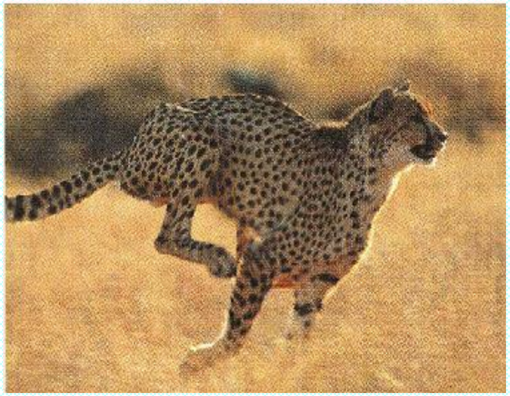
- Notasikan $t_1 - t_0 = \Delta t$ dan $y(t_1) - y(t_0) = \Delta y$.

- **Kecepatan sesaat** pada saat t_0 adalah $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ **dengan Δ*t*=0**.

- Tentu saja ekspresi di atas tidak dapat dihitung dengan hitungan aljabar biasa, karena memuat pembagian dengan nol. Untuk itu kita terapkan konsep limit, di mana $\Delta t \to 0$.

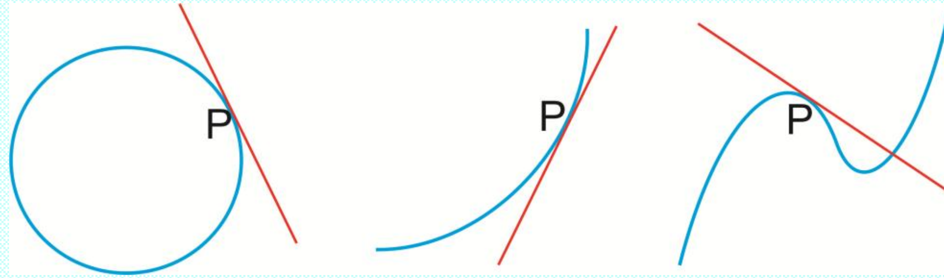
- Dengan konsep limit, kecepatan sesaat pada saat t_0 ditulis sebagai

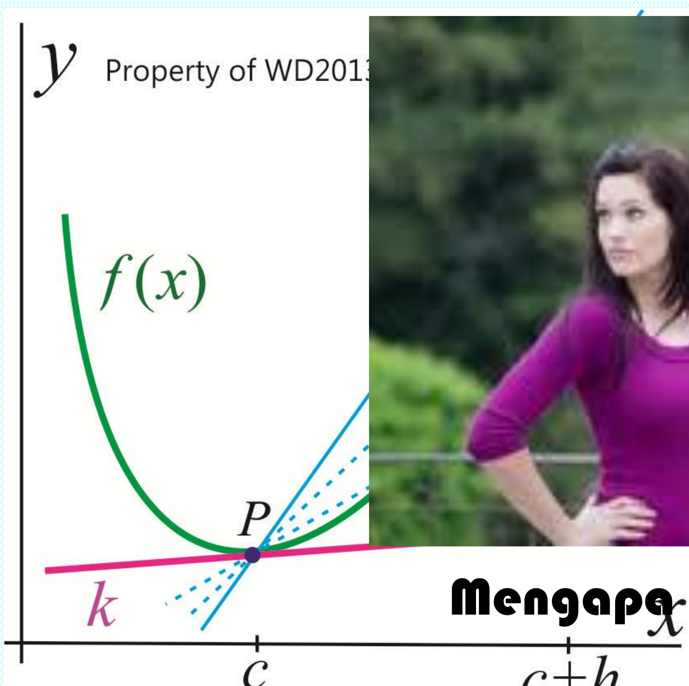
$$V(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t}$$

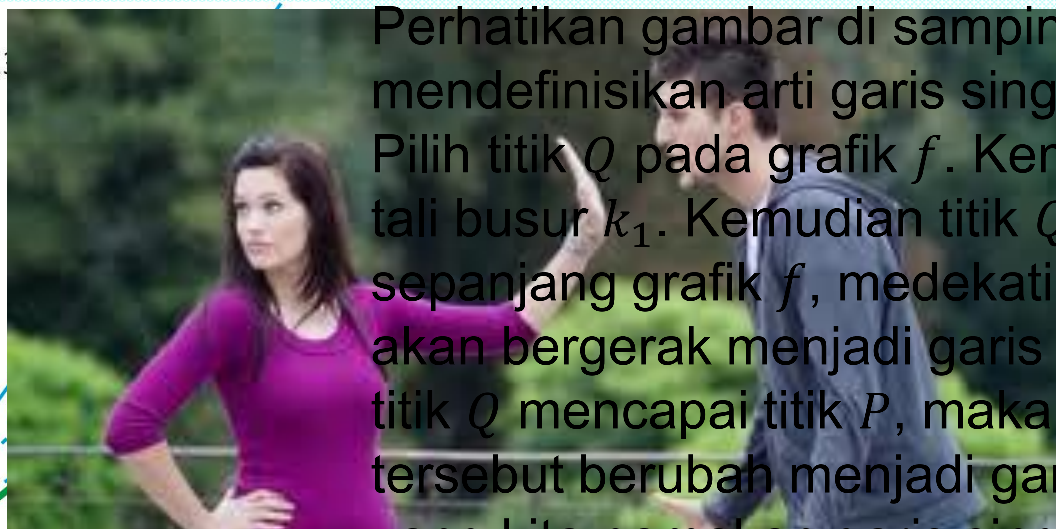


- Pada bab awal telah dikaji arti kemiringan/gradien dari sebuah garis lurus. Pada pasal ini konsep tersebut akan diperumum untuk memberi makna garis singgung pada sebuah kurva di bidang.

- Gambar di samping memperlihatkan makna garis singgung secara geometri. Kita akan menyusunnya dalam bentuk rumusan matematika.



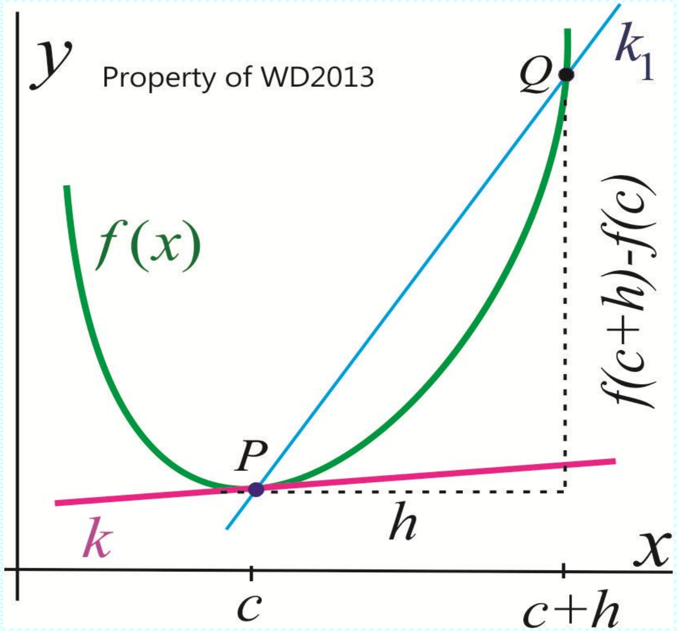




Perhatikan gambar di samping kiri. Kita akan mendefinisikan arti garis singgung di titik P. Pilih titik Q pada grafik f. Kemudian buat garis tali busur k_1. Kemudian titik Q kita gerakkan sepanjang grafik f, medekati titik P. Garis k_1 akan bergerak menjadi garis $k_2, k_3, \cdots$. Bila titik Q mencapai titik P, maka garis tali busur tersebut berubah menjadi garis k. Garis ini yang kita namakan garis singgung di titik P. $\underline{\Delta}$

Mengapa wanita mudah tersinggung?

Definisi Formal Garis Singgung Pada Kurva



- Kemiringan garis tali busur k_1 adalah

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

- Kemiringan garis singgung k = "kemiringan garis k_1 saat Q berimpit dengan P". Masalahnya kemiringan garis ini tidak dapat dihitung langsung karena nilai $h = 0$.

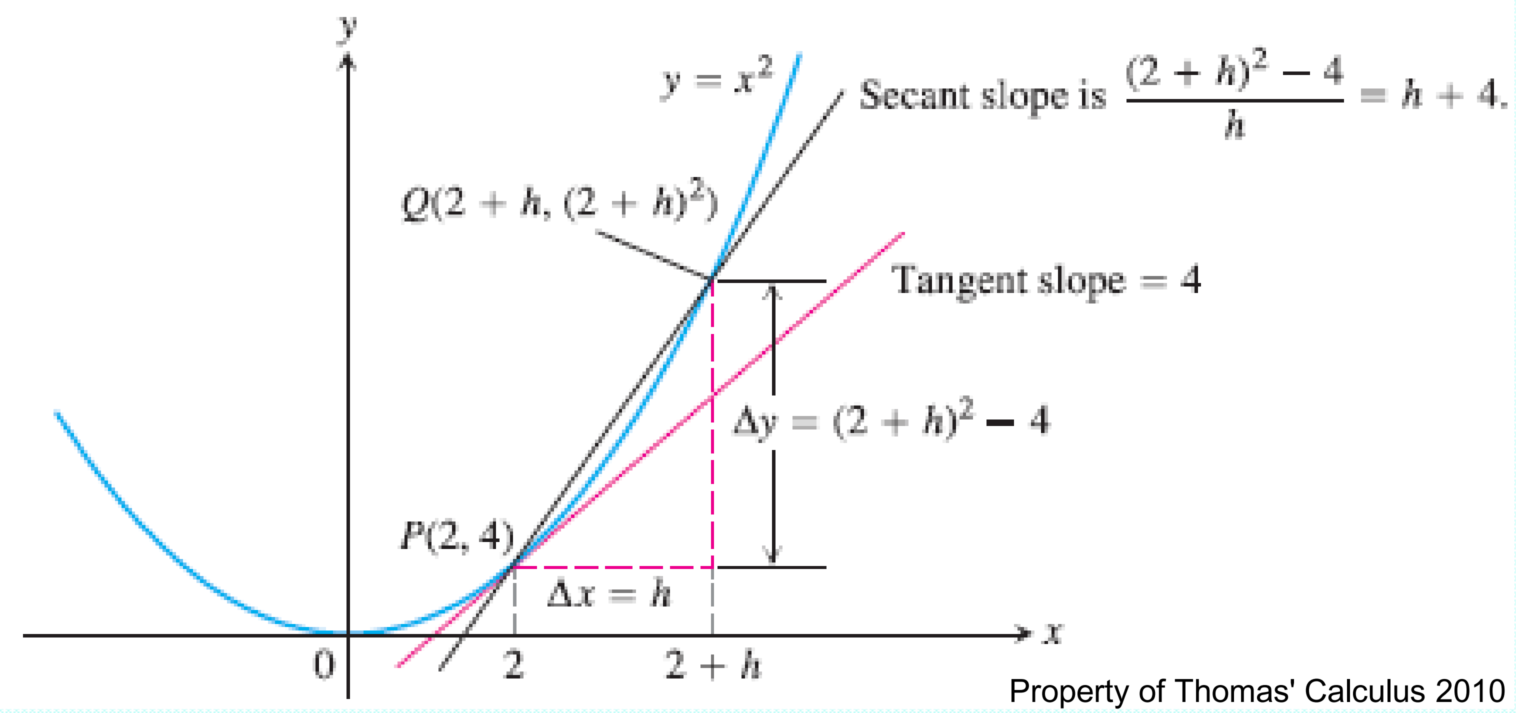
- Kemiringan / gradien garis singgung terhadap grafik f pada titik $P(c, f(c))$

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

- Kita lihat bentuk limit tersebut **persis sama** dengan limit pada konsep kecepatan sesaat. Masih sangat banyak sekali masalah-masalah fisis yang konsepnya sama. Hal ini akan dirumuskan pada konsep ***turunan***.

Contoh Perhitungan Gradien Garis Singgung

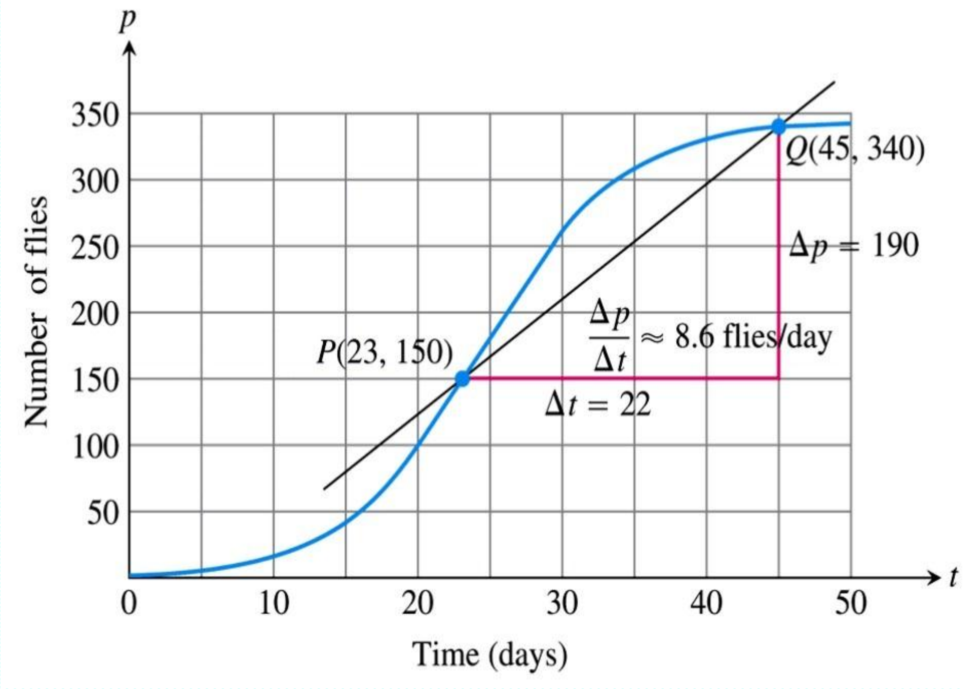
- Tentukan gradien garis singgung pada parabola $y := f(x) = x^2$ di titik $P(2,4)$.
- Kemiringan garis tali busur $m_{\sec} = \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2-2^2}{h} = \cdots = h+4$
- Perhatikan gambar di bawah ini. Bila titik Q bergerak mendekati titik P maka h mendekati nol, sehingga $m_{\sec}$ mendekati nilai 4. Jadi kemiringan garis singgung di titik $P(2,4)$, $m_{\tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 4$



Contoh

Thomas' Calculus $\mathbf{10^{th}}$ ***ed., page 43, example 4***

Gambar berikut memperlihatkan pertumbuhan populasi lalat buah *(Drosophila)* selama 50 hari pengamatan. Jumlah populasi lalat dicatat dalam interval tertentu, kemudian diplot terhadap waktu dan dihubungkan menjadi sebuah kurva. Tentukan **laju pertumbuhan rata-ratanya** antara hari ke 23 sampai dengan 45.



Misalkan t dan P menyatakan waktu dan jumlah populasi lalat.

Dari grafik di samping,

$$P(23) = 150 \text{ dan } P(45) = 340.$$

Laju pertumbuhan rata-rata antara $t = 23 \text{ dan } t = 45$ adalah

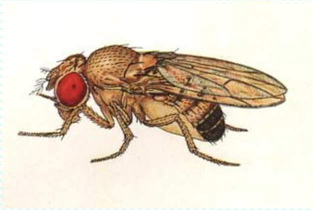
$$V_{\text{rata}} = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

$$= \frac{P(45) - P(23)}{45 - 23}$$

$$= \frac{340 - 150}{45 - 23}$$

$= 8,6$ lalat/hari

Drosophila melanogaster



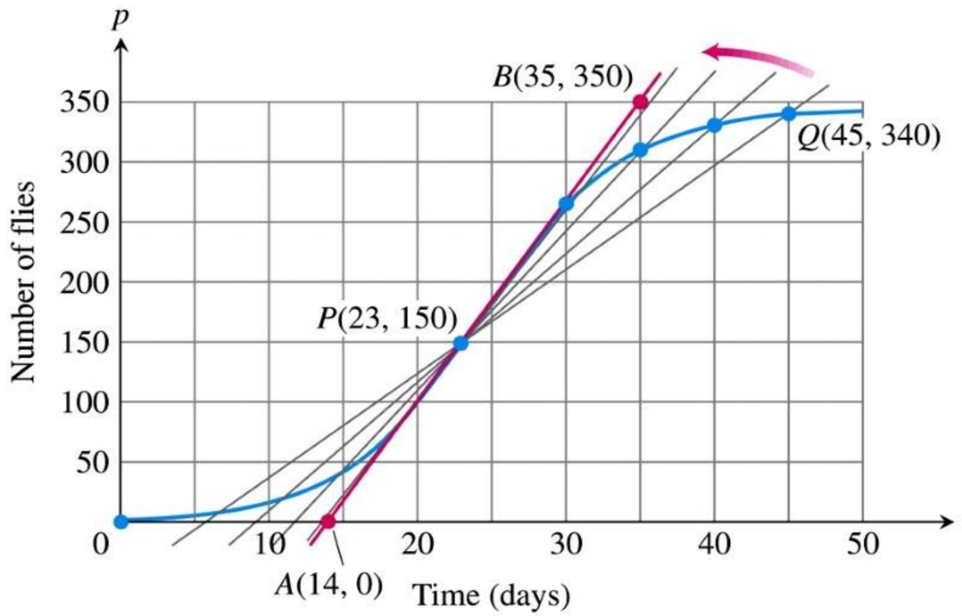
Contoh

Thomas' Calculus $\mathbf{10^{th}}$ ***ed., page 43, example 5***

(Lihat soal pada halaman sebelumnya). Tentukan laju pertumbuhan populasi lalat buah pada hari ke 23.

Misalkan $t_0 = 23$ dan $t_1 = t_0 + \Delta t$. Laju pertumbuhan rata-rata untuk berbagai Δt disajikan pada table di bawah ini.

Q	**Slope of** ***PQ*** $= \Delta p/\Delta t$ **(flies/day)**
(45, 340)	$\frac{340-150}{45-23} \approx 8.6$
(40, 330)	$\frac{330-150}{40-23} \approx 10.6$
(35, 310)	$\frac{310-150}{35-23} \approx 13.3$
(30, 265)	$\frac{265-150}{30-23} \approx 16.4$



Laju pertumbuhan pada hari ke 23 merupakan gradien garis singgung (garis pink) di titik $(23,150)$. Karena garis ini melalui $(14,0)$ dan $(35,350)$, maka $V(23) = \frac{350-0}{35-14} = 16{,}7$ (nilai pendekatan)

Definisi Turunan

Misalkan f sebuah fungsi real dan $x \in D_f$. Turunan dari fungsi f di titik x,

dinotasikan $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Perhatikan bahwa turunan merupakan sebuah limit dengan bentuk khusus.

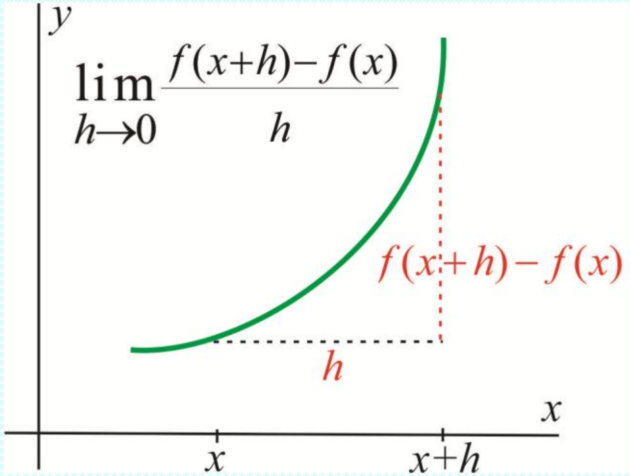
Latihan: Gunakan definisi di atas untuk menyelesaikan soal-soal berikut,

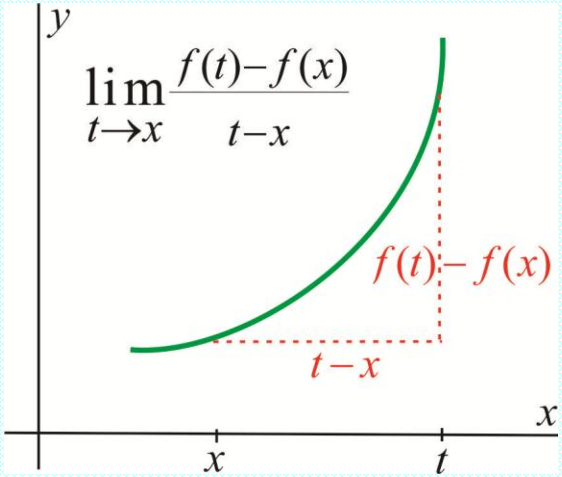
1. Cari kemiringan garis singgung terhadap $y = x^2 - 2x$ di titik $(2,0)$. Δ
2. Seekor bakteri berkembang dan beratnya setelah t jam adalah $\frac{1}{2}t^2 + 1$ gram. Berapa laju perkembangannya pada saat $t = 2$ jam? ψ
3. Massa sepotong kawat (1 dimensi) yang panjang x cm adalah x^3 gram. Berapa rapat massa pada posisi 3 cm dari ujung kirinya? Δ

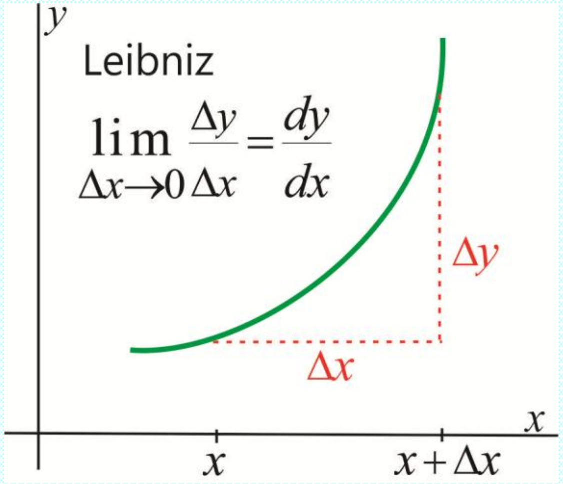
Berbagai Notasi dan Penulisan Turunan

Berikut adalah berbagai notasi dan penulisan turunan yang semuanya ekivalen.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = D[f] = D_x[f]$$







Bila fungsi f mempunyai turunan di c maka f kontinu di c.

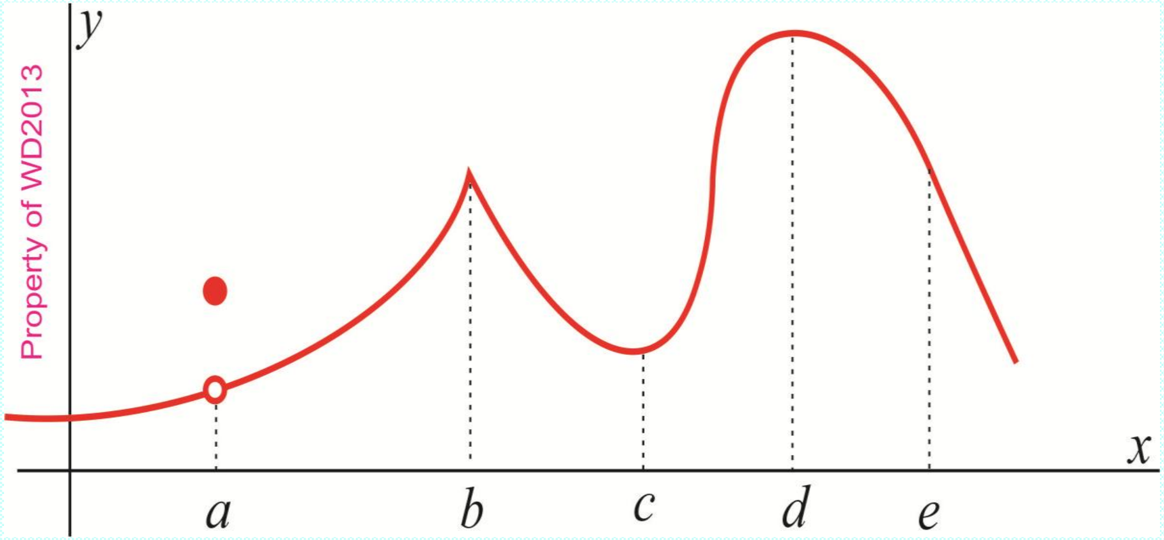
$$f'(c) \text{ ada} \Longrightarrow f \text{ kontinu di } c$$

Sebaliknya, bila f kontinu di c, apakah f dijamin punya turunan di c ?

Untuk menjawab pertanyaan di atas amatilah pada fungsi $f(x) = |x|$.
Fungsi ini telah diketahui kontinu di seluruh $\mathbb{R}$, jadi f kontinu di $x = 0$.
Sekarang kita periksa apakah f memiliki turunan di $x = 0$ Δ

f kontinu di c tidak menjamin $f'(c)$ ada

$$f \text{ tidak kontinu di } c \Longrightarrow f'(c) \text{ tidak ada}$$



Amati grafik di samping lalu periksa apakah f kontinu dan turunannya ada, pada titik-titik $x = a, b, c, d, e$.

Teorema-Teorema Turunan

Misalkan f dan g fungsi-fungsi real,
k konstanta real, dan n bilangan asli.

- $D_x[k] = 0$ $\underline{\Delta}$
- $D_x[x] = 1$ $\underline{\Delta}$
- $D_x[x^n] = nx^{n-1}$ $\underline{\Delta}$
- $D_x[kf] = k \cdot D_x[f]$ $\underline{\Delta}$
- $D_x[f+g] = D_x[f] + D_x[g]$
- $D_x[f-g] = D_x[f] - D_x[g]$
- $D_x[fg] = D_x[f] \cdot g + f \cdot D_x[g]$
- $D_x\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{D_x[f] \cdot g + f \cdot D_x[g]}{g^2}$
- $D_x[x^{-n}] = -nx^{-n-1}$ $\underline{\Delta}$

Turunan fungsi Trigonometri

- $D_x[\sin x] = \cos x$ $\underline{\Delta}$
- $D_x[\cos x] = -\sin x$
- $D_x[\tan x] = \sec^2 x$
- $D_x[\cot x] = -\csc^2 x$
- $D_x[\sec x] = \sec x \cdot \tan x$
- $D_x[\csc x] = -\csc x \cdot \cot x$

1. Tentukan turunan dari $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$ Δ
2. Tentukan persamaan garis singgung terhadap $y = \frac{1}{x^2+1}$ di titik $(1, \frac{1}{2})$ Δ
3. Tentukan semua titik pada grafik $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x$ yang kemiringan garis singgungnya bernilai satu. ψ
4. Tentukan persamaan garis singgung terhadap $y = 4x - x^2$ yang melalui titik $(2,5)$. ψ
5. Hans merayap dari kiri ke kanan sepanjang kurva $y = 7 - x^2$. Grace menunggu di posisi $(4,0)$. Tentukan jarak antara keduanya pada saat pertama kali saling melihat. ψ
6. Tunjukkan kurva $f(x) = \sqrt{2}\sin x$ dan $g(x) = \sqrt{2}\cos x$ berpotongan tegak lurus pada sebuah titik di interval $(0, \frac{\pi}{2})$. Δ

Sebelum membahas aturan rantai, perhatikanlah arti notasi berikut:

- Jika $f = f(x)$ notasi $f' = \frac{df}{dx}$. Contoh $f(x) = \sin x$, $f' = \cos x$
- Jika $f = f(u)$ notasi $f' = \frac{df}{du}$. Contoh $f(u) = \sin u$, $f' = \cos u$
- Jika $f = f(x^2)$ notasi $f' = \frac{df}{dx^2}$. Contoh $f(x^2) = \sin x^2$, $f' = \cos x^2$

Aturan rantai adalah aturan untuk menentukan turunan fungsi komposisi.

Misalkan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$, dengan demikian $y = f(u) = f(g(x))$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

atau

$$D_x[y] = D_u[y] \cdot D_x[u]$$

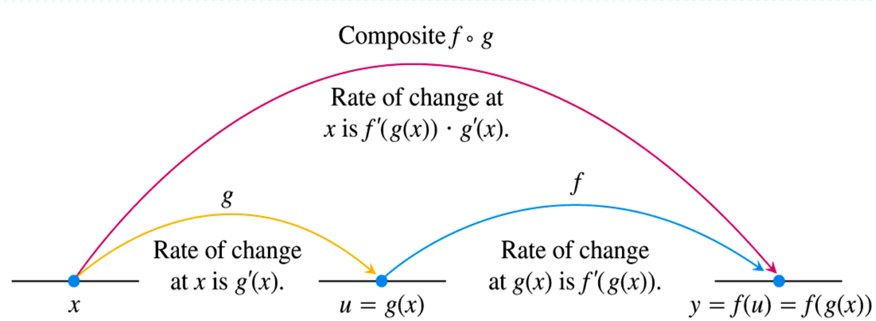
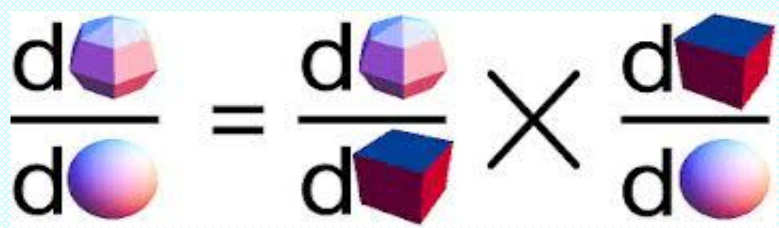


FIGURE 3.24 Rates of change multiply: The derivative of $f \circ g$ at x is the derivative of f at $g(x)$ times the derivative of g at x.



Contoh: Tentukan $D_x[\sin(x^3 - 3x)]$ Δ

Aturan rantai bersusun digunakan untuk menghitung turunan fungsi komposisi yang dibangun dari tiga buah fungsi atau lebih

Misalkan $y = f(u)$, $u = g(v)$, dan $v = h(x)$, jadi

$$y = f(u) = f\big(g(v)\big) = f\Big(g\big(h(x)\big)\Big)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

atau

$$D_x[y] = D_u[y] \cdot D_v[u] \cdot D_x[v]$$

Contoh: Tentukan $D_x[\sin^3(x^3 - 3x)]$ Δ

Latihan

1. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi-fungsi berikut:

   a. $y = \left(\frac{x^2-1}{x+4}\right)^4$ ψ

   b. $y = \left(\frac{\sin x}{\cos(2x)}\right)$

   c. $y = \sin^3(\cos x)$

   d. $y = \sin^3(\cos x^3)$

   e. $y = \sin(\cos^2 x^3)$

   f. $y = \sin(\cos(\sin(2x)))$

   g. $D_x[f(x^2+1)]$

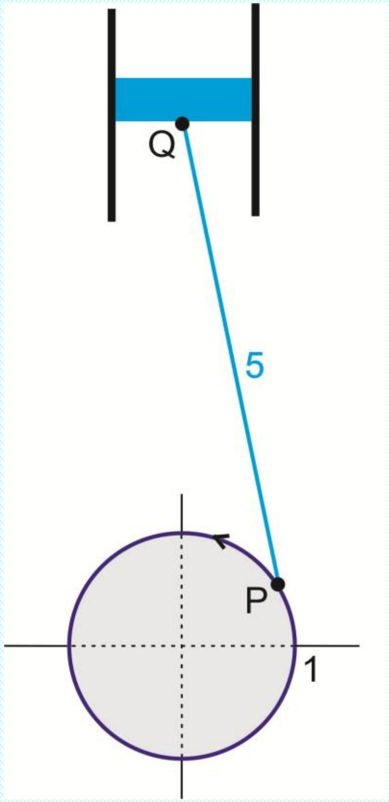
   h. $D_z\left[\left(1+f(2z)\right)^2\right]$

   i. $D_t[\sec^3(f(t))]$

2. Rusuk sebuh kubus bertambah dengan laju 16 cm/menit.

   a. Tentukan laju perubahan volumenya pada saat sisinya 20 cm.

   b. Tentukan laju perubahan luas permukaannya pada saat sisinya 15 cm. ψ



3. Perhatikan gambar roda-piston di samping. Roda berputar dengan arah berlawanan jarum dengan laju 2 rad/detik. Pada saat $t = 0$ titik P berada di posisi $(1,0)$.

   a. Tentukan kedudukan titik P setiap saat.

   b. Tentukan ordinat titik Q setiap saat.

   c. Tentukan kecepatan gerak titik Q. Ω ψ

Latihan

4. Dua buah kapal bertolak dari titik yang sama. Kapal A bergerak ke timur dengan laju 20 km/jam. Kapal B bergerak ke utara dengan laju 12 km/jam. Seberapa cepat mereka berpisah setelah 3 jam? ψ

5. Tentukan titik potong garis singgung terhadap kurva $f(x) = x\cos(x^2)$ di titik $x = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$ dengan sumbu x ψ

6. Misalkan $f(0) = 1$ dan $f'(0) = 2$. Tentukan $g'(0)$ jika $g(x) = \cos(f(x))$

7. Misalkan $f(1) = 2$, $f'(1) = -1$, $g(1) = 0$, dan $g'(1) = 1$. Tentukan $h'(1)$, bila $h(x) = f(x) \cdot \cos\big(g(x)\big)$.

Turunan tingkat tinggi adalah fungsi yang diperoleh dengan menurunkan sebuah fungsi beberapa kali. Pembahasan turunan tingkat tinggi memegang peranan penting pada banyak aplikasi, diantaranya: masalah kecekungan grafik fungsi, masalah percepatan gerak sebuah benda, masalah hampiran nilai fungsi, masalah rangkaian listrik dan lain-lain.

Misalkan $f(x)$ fungsi real. Turunannya, $f'(x)$ merupakan fungsi real juga. Dengan demikian kita dapat mendefinikan turunan-turunan berikutnya.

Turunan ke dua: $f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$

Turunan ke tiga: $f'''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f''(x+h)-f''(x)}{h}$

Notasi-Notasi Turunan Tingkat Tinggi

Tabel berikut menyajikan notasi-notasi untuk turunan tingkat tinggi:

Turunan ke	Notasi f'	Notasi y'	Oprator D	Notasi Libniz
1	$f'(x)$	y'	$D_x[y]$	$\frac{dy}{dx}$
2	$f''(x)$	y''	$D_x^2[y]$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
3	$f'''(x)$	y'''	$D_x^3[y]$	$\frac{d^3y}{dx^3}$
4	$f^{(4)}(x)$	$y^{(4)}$	$D_x^4[y]$	$\frac{d^4y}{dx^4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	$D_x^n[y]$	$\frac{d^ny}{dx^n}$

Latihan

1. Sebuah partiket bergerak pada sumbu x dengan posisi setiap saat $S(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 30$. Tentukan,

   a. Kapan kecepatannya nol?

   b. kapan kecepatannya positif?

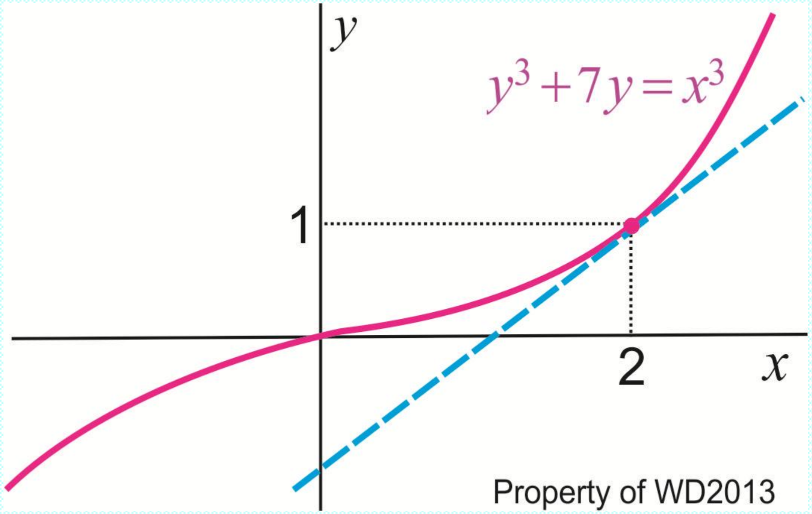
   c. Kapan partikel bergerak mundur?

   d. Kapan percepatannya positif?

   e. Ilustrasikan gerak partikel tersebut. Δ

2. Cari rumus turunan ke n dari $y = \frac{1}{1-x}$ ψ

Perhatikan grafik $y^3 + 7y = x^3$ di samping. Dalam pertaksamaan tersebut tersirat y sebagai fungsi dari x (bisa juga sebaliknya).



Bentuk seperti ini disebut bentuk implisit.

Secara umum fungsi dalam bentuk implisit adalah fungsi dalam bentuk persamaan $F(x, y) = 0$

Bagaimana cara menentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi berbentuk implisit ?

Prinsip: Misalkan y fungsi dari x dalam bentuk implisit $F(x, y) = 0$. Untuk mendapatkan $\frac{dy}{dx}$, turunkan kedua ruas terhadap x, dengan mengingat y bukan variabel bebas, tetapi bergantung pada x.

Untuk mencari turunan kedua $\frac{d^2y}{dx^2}$, kita tulis turunan pertamanya dalam bentuk $G(x, y, y') = 0$, lalu turunkan terhadap x, dengan mengingat y dan y' merupakan fungsi dari x.

Dengan menggunakan turunan implisit, kita dapat mebuktikan teorema berikut:

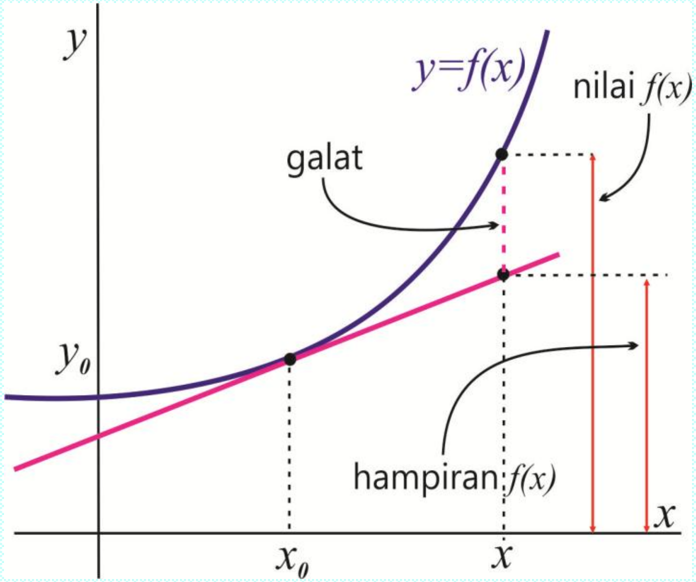
Teorema: Misalkan $r \in \mathbb{Q}$, maka $D_x[x^r] = rx^{r-1}$ $\underline{\Delta}$

Latihan:

1. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$ dari
   a. $y^3 + 7y - x^3 = 0$ $\underline{\Delta}$
   b. $x^3y^4 - 1 = 0$ $\underline{\psi}$
   c. $\sqrt{\sin(xy^2)} = 0$ Δ
   d. $\frac{y^2}{x^3} - 1 = y^{\frac{3}{2}}$
2. Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal (garis yang tegak lurus garis singgung) terhadap $y^3 - xy^2 + \cos(xy) = 2$ di titik $(0,1)$. $\underline{\psi}$
3. Tunjukkan hiperbola $xy = 1$ dan $x^2 - y^2 = 1$ berpotongan tegak lurus. $\underline{\psi}$

Diferensial Dan Aproksimasi

- Tahukah anda hitungan seperti $\sin(31°)$, $\sqrt{4{,}1}$, $\log_{10} 3$, dan lain-lain pada sebuah kalkulator atau komputer merupakan pendekatan/aproksimasi ?
- Bagaimana prosedur/teknik perhitungan aproksimasi tersebut ?
- Pada pasal ini kita akan mempelajari aproksimasi yang paling elementer.



- Perhatikan gambar fungsi di samping (bayangkan fungsi $y = \sqrt{x}$).
- Akan dihitung nilai fungsi tersebut di suatu titik x tertentu (bayangkan di titik $4{,}1$).
- Karena $f(x)$ sukar dihitung, kita cari titik "di**dekat**nya" yang mudah dihitung. Sebut titik tersebut titik x_0 (bayangkan titik 4).

- Tetapkan garis singgung terhadap $f(x)$ di titik $\left(x_0, f(x_0)\right)$
- Nilai $f(x)$ kita aproksimasi dengan ordinat dari garis singgung di titik x.

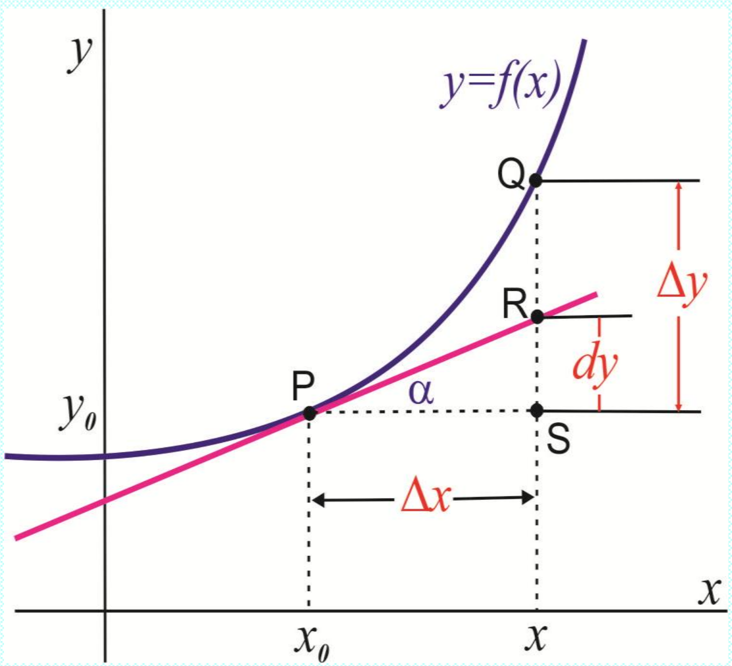
Dengan mengamati gambar di atas, terlihat bahwa hampiran nilai dengan metode ini akan "baik" bila x dan x_0 letaknya "berdekatan"

Rumusan Hampiran Diferensial

Sebelum kita merumuskan hampiran diferensial, akan didefinisikan dahulu beberapa istilah,

- Notasikan $\Delta x = x - x_0$ dan $\Delta y = y - y_0$.
- Diferensial dari **peubah bebas** $\boldsymbol{x}$, $dx = \Delta x$
- Diferensial dari **peubah tak bebas** y, $dy = f'(x_0) \cdot dx$ *** $dy \neq \Delta y$ ***

Arti geometri dari tiap besaran di atas dapat dilihat pada gambar berikut,



Jelaskan mengapa dy sama dengan segmen garis $\overline{RS}$?

Perhatikan bahwa Δx sukar untuk dihitung, tetapi dy mudah.

Prinsip hampiran diferensial / linear

$$\boldsymbol{f(x) - f(x_0) = \Delta y \approx dy = f'(x_0)\, dx}$$

Soal-soal Latihan Turunan

1. Terapkan hampiran diferensial untuk menghampiri/mengaproksimasi nilai,

   a. $\sqrt{3{,}9}$ $\underline{\Delta}$ b. $\sin\left(\frac{31}{180}\pi\right)$ $\underline{\psi}$

2. Dari hasil pengukuran diperoleh rusuk sebuah kubus 11,4 cm dengan galat (error) $\pm 0{,}05$ cm. Hitung volume kubus dan taksir galatnya. $\underline{\Delta}$

3. Limit-limit berikut merupakan turunan dari sebuh fungsi. Tentukan fungsi asal dan turunannya,

   a. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{3(2+h)^2-3(2)^2}{h}$ b. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\Delta x\right)-1}{\Delta x}$ c. $\lim\limits_{p\to x}\frac{\frac{3}{p}-\frac{3}{x}}{p-x}$ d. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}$ $\underline{\psi}$

4. Gambarkan sebuah fungsi f yang memenuhi semua kriteria berikut,

   a. Daerah Definisinya $D_f = [-2,3]$

   b. $f(-2) = f(-1) = f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = 1$

   c. f kontinu diseluruh D_f kecuali di $x = -2, -1$, dan 1

   d. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$, dan $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$

   e. f tidak memiliki turunan di 0 dan 2. $\underline{\psi}$

Soal-soal Latihan Turunan

5. Sebuah kotak baja berbentuk kubus, tebal dindingnya 0,25 cm dan volumenya 1000 cm^3. Gunakan hampiran diferensial untuk mengaproksimasi volume bahannya. ψ

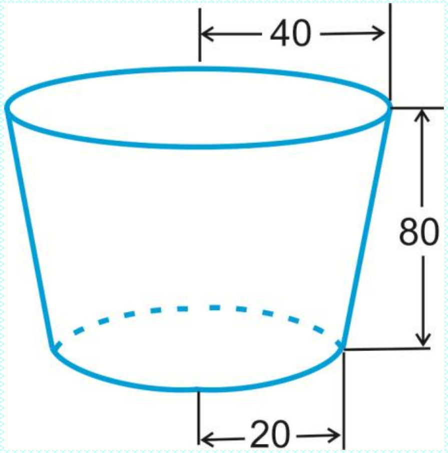
6. Sebuah tangki berbentuk kerucut terbalik diisi air dengan laju 8 dm^3/menit. Bila tinggi kerucut 12 dm dan jari-jari atasnya 6 dm, tentukan laju permukaan air naik pada saat tinggi air 4 dm. ψ

7. Pada tengah hari, sebuah pesawat terbang melewati kota Bandung dengan laju 640 km/jam. Pesawat kedua bergerak bergerak ke timur dengan kecepatan 600 km/jam dan melintasi Bandung 15 menit kemudian. Bila keduanya berada pada ketinggian yang sama, tentukan seberapa cepat keduanya berpisah pada Pk 13.15 ψ

8. Sebuah tongkat yang panjangnya 20 dm bersandar di dinding. Ujung bawahnya ditarik sepanjang lantai menjauhi dinding dengan laju 2 dm/detik. Seberapa cepat ujung atasnya bergeser menuruni dinding pada saat ujung bawahnya berjarak 4 dm dari dinding ψ Ω

9. Tangki berbentuk pada gambar di sebelah diisi air dengan laju 2 liter/menit. Seberapa cepat permukaan air naik pada saat tinggi air 30 dm ?

   Petunjuk: Volume air pada kerucut terpotong dengan jari-jari alas a, jari-jari atas b, dan tinggi h adalah $V = \frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)$. ψ



The End Of

CHAPTER 2

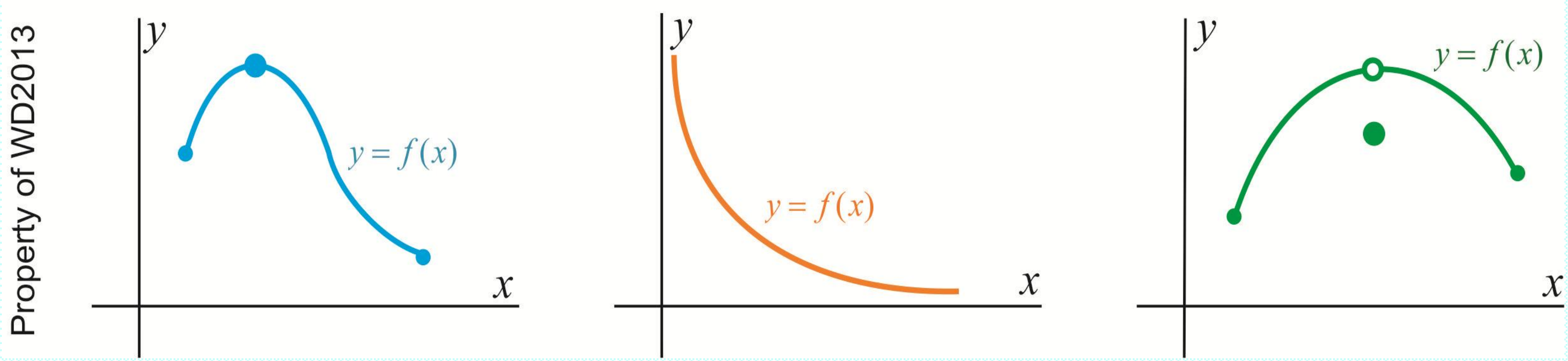
BAB 3

Penggunaan Turunan

- Pada bagian ini akan dikaji mengenai penggunaan turunan untuk berbagai aplikasi sederhana. Pembahasan teori meliputi maksimum dan minimum fungsi, kemonotonan, kecekungan, titik belok, asimtot datar/tegak/miring, dan diakhiri dengan penggambaran grafik fungsi.

- Soal-soal latihan yang disajikan meliputi berbagai masalah real sederhana. Melalui soal-soal ini diharapkan pembelajar dapat lebih meresapi konsep yang ada.

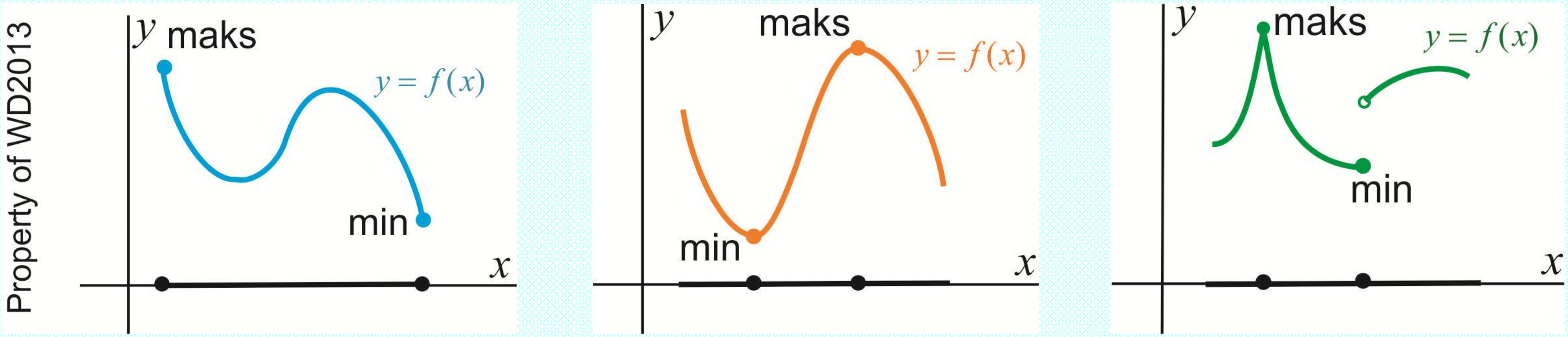
- Definisi: Misalkan f sebuah fungsi dengan daerah definisi D_f dan $c \in D_f$
  a. Fungsi f disebut mencapai **maksimum** di c bila $\boldsymbol{f(c) \geq f(x)}$ $\forall\, x \in D_f$.
     Nilai $\boldsymbol{f(c)}$ disebut **nilai maksimum.**
  b. Fungsi f disebut mencapai **minimum** di c bila $\boldsymbol{f(c) \leq f(x)}$ $\forall\, x \in D_f$.
     Nilai $\boldsymbol{f(c)}$ disebut **nilai minimum.**
- Titik di mana f mencapai maksimum / minimum dikatakan **titik ekstrim**.
- Tiga grafik di bawah ini menunjukkan titik ekstrim dari f belum tentu ada.



- Teorema: Bila f kontinu dan daerah definisinya berupa selang tutup $[a, b]$, maka f pasti memiliki titik maksimum dan titik minimum.

Titik Kritis

Lokasi kemungkinan terjadinya titik ekstrim



a. Titik **ujung interval**.

b. Titik **stasioner**, yaitu titik di mana $f'(x) = 0$.

c. Titik **singular**, yaitu titik di mana $f'(x)$ tidak ada.

Titik kritis

Perlu diperhatikan bahwa titik kritis hanya merupakan **calon** titik ekstrim, jadi ada kemungkinan titik kritis batal menjadi titik ekstrim.

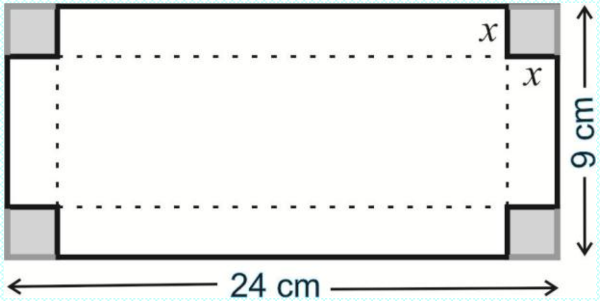
Langkah-langkah untuk menentukan titik ekstrim:

a. Kumpulkan semua titik kritis dari f

b. Bandingkan nilai $f(x)$ disemua titik kritis tersebut

Latihan

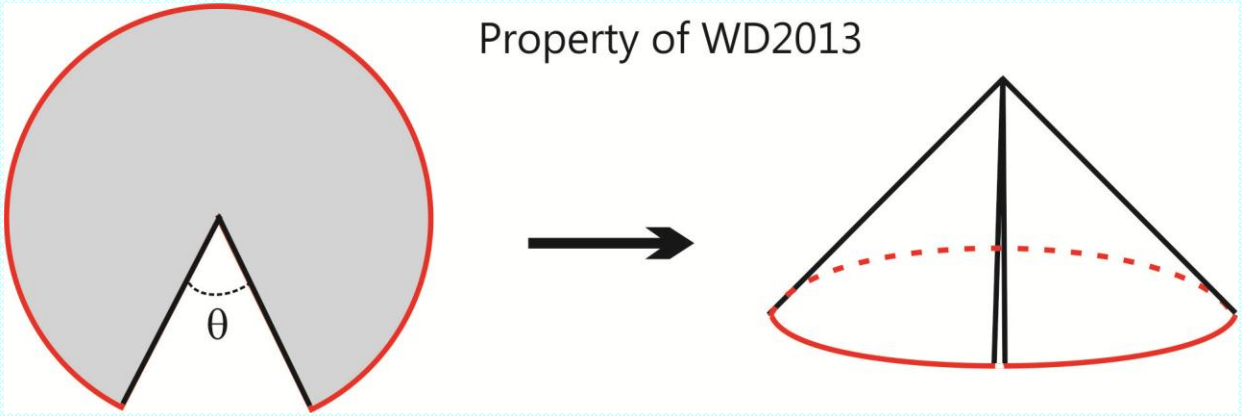
1. Tentukan semua titik ekstrim dari fungsi-fungsi berikut:
   a. $f(x) = -2x^3 + 3x^2,\ -\frac{1}{2} \le x \le 2$ Δ   b. $g(x) = x^{\frac{2}{3}},\ \ -1 \le x \le 2$ ψ
2. Tentukan dua buah bilangan tak negatif yang jumlahnya 10 dan hasil kalinya maksimum. Petunjuk, misalkan salah satu bilangannya x. ψ
3. Cari sebuah bilangan yang bila dikurangi kuadratnya bernilai maksium. Bilangan tersebut pasti terletak di antara 0 dan 1, mengapa? Δ
4. Sebuah kotak persegi panjang dibuat dari selembar kertas dengan memotong sisi-sisinya sepanjang x cm dan melipatnya.Tentukan x agar volume kotak maksimum. ψ



5. Kawat sepanjang 16 cm dipotong jadi dua bagian. Salah satu potongan dibentuk jadi bujur sangkar dan potongan lainnya dibuat jadi lingkaran. Berapa ukuran potongan tersebut agar:
   a. Jumlah total luasnya minimum
   b. Jumlah total luasnya maksimum ψ

Latihan

6. Sebuah kerucut dibuat dari potongan selembar lingkaran kertas berjari-jari 10 cm. Tentukan volume maksimum kerucut yang dapat dibuat. ψ



Kemonotonan Grafik Fungsi

Istilah kemonotonan berhubungan dengan naik-turunnya grafik sebuah fungsi, bila variable bebasnya bertambah besar. Secara geometri, grafik sebuah fungsi disebut monoton naik gambarnya makin ke kanan makin tinggi, dan disebut monoton turun bila grafiknya makin ke kanan makin rendah.

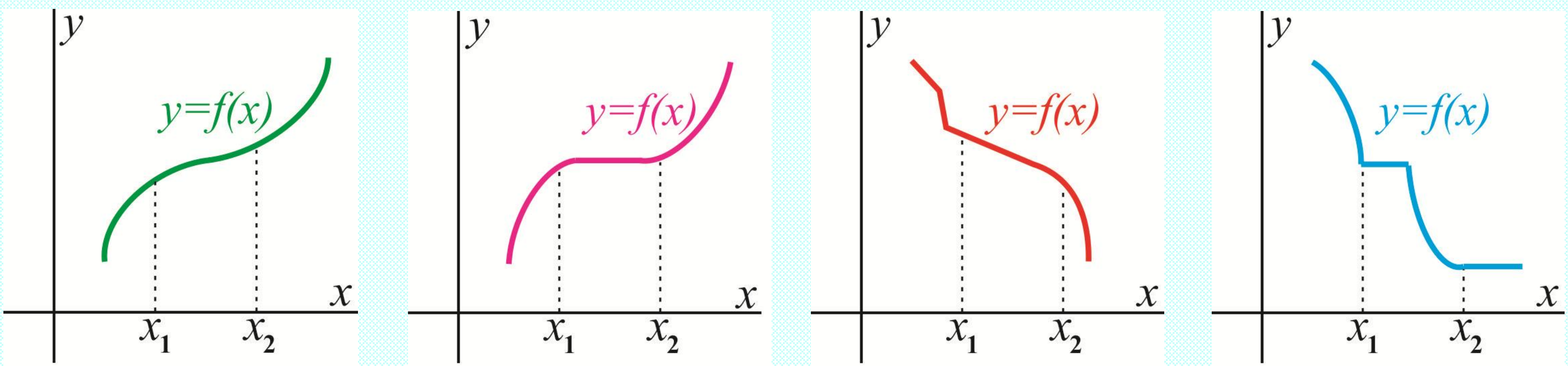
Definisi: Misalkan f terdefinisi pada interval I.

a. f disebut monoton **naik** pada I, bila $\forall\ x_1 < x_2 \Longrightarrow \boldsymbol{f(x_1) < f(x_2)}$

b. f disebut monoton **tak turun** pada I, bila $\forall\ x_1 < x_2 \Longrightarrow \boldsymbol{f(x_1) \leq f(x_2)}$

c. f disebut monoton **turun** pada I, bila $\forall\ x_1 < x_2 \Longrightarrow \boldsymbol{f(x_1) > f(x_2)}$

d. f disebut monoton **tak naik** pada I, bila $\forall\ x_1 < x_2 \Longrightarrow \boldsymbol{f(x_1) \geq f(x_2)}$



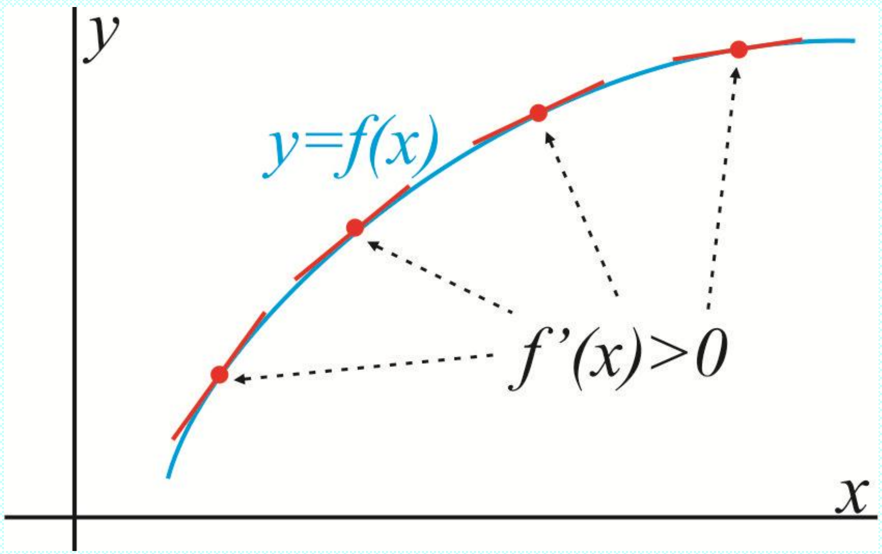
f monoton naik f monoton tak turun f monoton turun f monoton tak naik

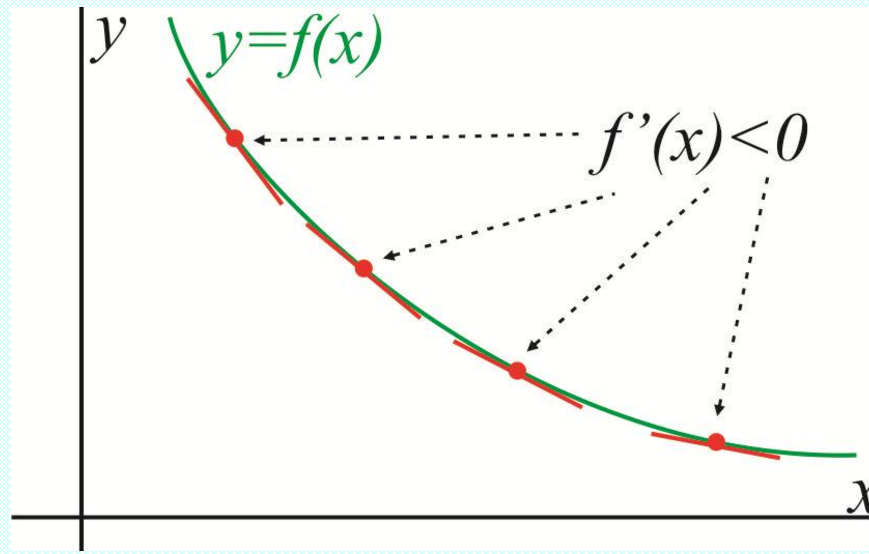
Hubungan kemonotonan dengan turunan fungsi

Bila $f'(x) > 0$ untuk setiap $x \in I$ maka f monoton naik di I

Bila $f'(x) < 0$ untuk setiap $x \in I$ maka f monoton turun di I

Benarkah bila f monoton naik di I maka $f'(x) > 0$ untuk setiap $x \in I$? Jelaskan





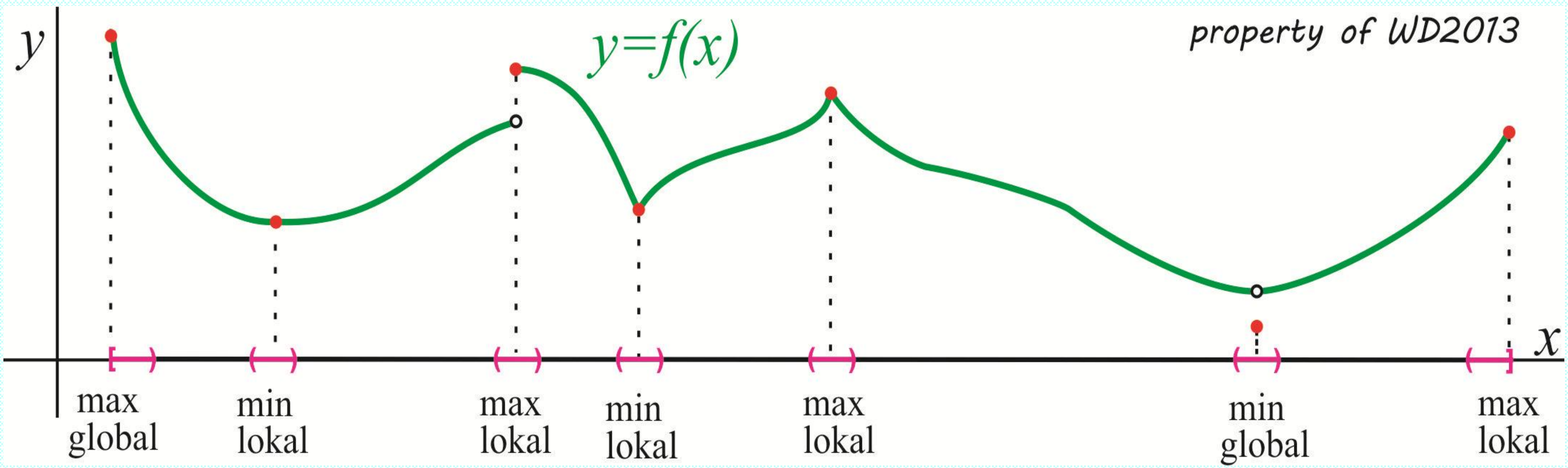
Latihan: Tentukan daerah kemonotonan dari $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$ Δ

Ekstrim Lokal

Misalkan f sebuah fungsi dengan daerah definisi S yang memuat titik c. f dikatakan mencapai maksimum lokal / minimum lokal di c bila terdapat interval buka $(a, b) \subset S$ yang memuat c sehingga f mencapai maksimum / minimum di (a, b).

Titik maksimum lokal / minimum lokal, disebut juga **titik ekstrim lokal**.

Bila c titik ekstrim lokal, nilai fungsinya $f(c)$ disebut **nilai ekstrim lokal.**

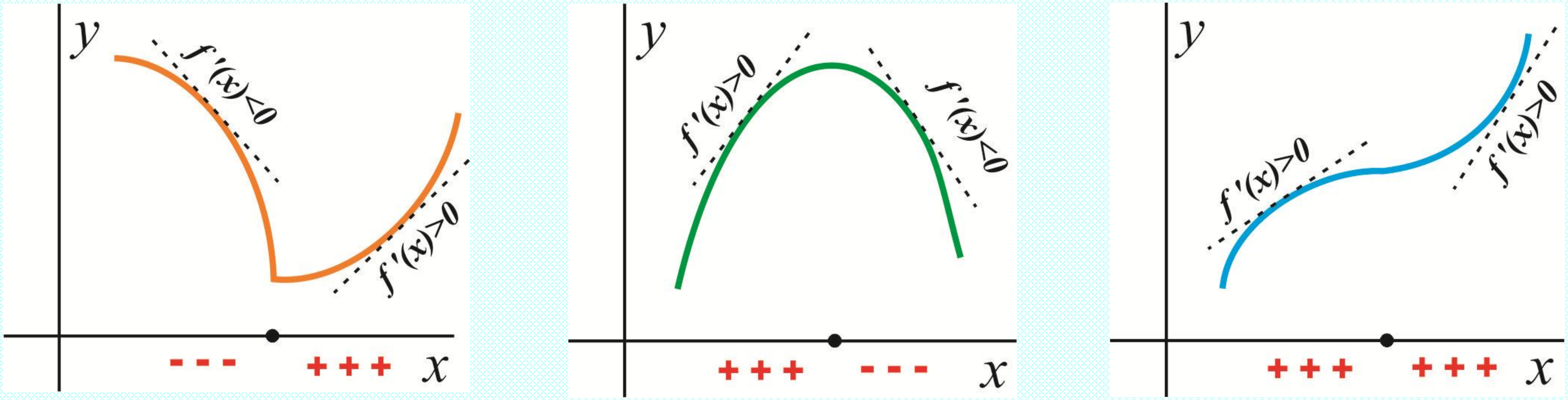


Seperti pada ekstrim global, calon-calon titik ekstrim lokal adalah semua titik kritis dari f.

Uji Ekstrim Lokal Memakai Turunan Pertama

Misalkan fungsi $\boldsymbol{f}$ **kontinu** pada interval buka (a, b) dan $\boldsymbol{c}$ **titik kritis** dari f. Periksa tanda $f'(x)$ di kiri dan kanan dari c.

- Bila tanda $f'(x)$ berubah dari **negatif ke positif**, maka c titik **minimum local.**
- Bila tanda $f'(x)$ berubah dari **positif ke negatif**, maka c titik **maksimum local.**
- Bila tanda $f'(x)$ **tidak berubah**, maka c **bukan titik ekstrim local.**



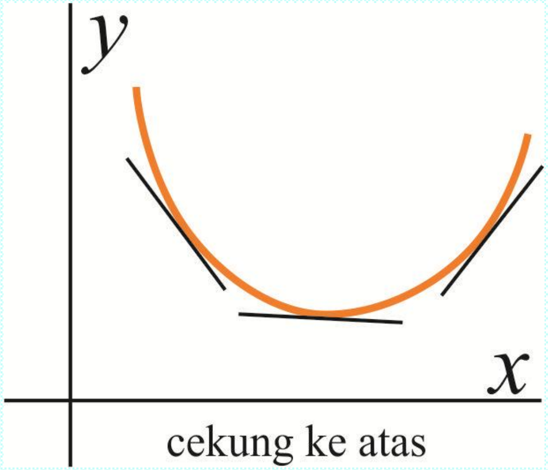
➢ Apakah titik ekstrim global termasuk titik ekstrim local ?

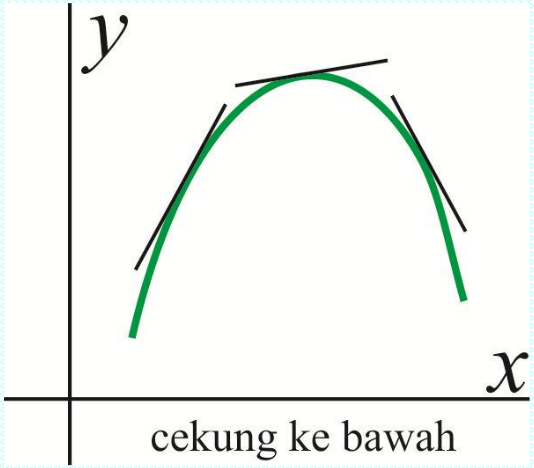
➢ Bila f sebarang fungsi yang terdefnisi pada interval tutup $[a, b]$, apakah titik a dan b pasti termasuk titik ekstrim local ?

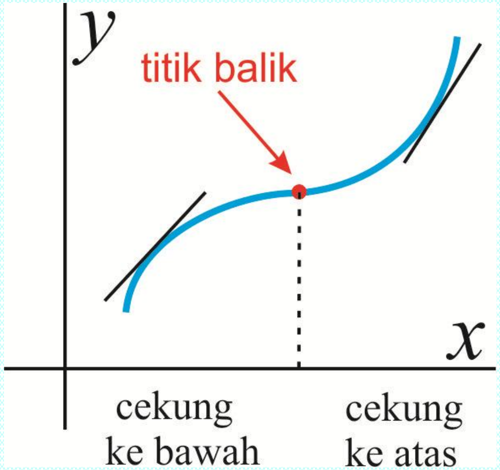
Latihan: Tentukan semua titik ekstrim lokal dari $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$ $\underline{\Delta}$

Definisi: Misalkan f fungsi yang terdiferensialkan sepanjang interval buka I.

- Fungsi f disebut **cekung ke atas** bila f' **monoton naik**.
- Fungsi f disebut **cekung ke bawah** bila f' **monoton turun.**
- Titik $c \in I$ dimana terjadi **perubahan kecekungan** disebut **titik belok/balik.**







Teorema Pengujian Kecekungan:

- Bila $f''(x) > 0$ maka f cekung ke atas.
- Bila $f''(x) < 0$ maka f cekung ke bawah.

Latihan: Tentukan daerah kecekungan dan titik belok/balik dari

a. $f(x) = x^3$ ψ   b. $f(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$ ψ   c. $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$ Δ

Uji Ekstrim Lokal Memakai Turunan Kedua

Teorema berikut merupakan alternative pengujian ekstrim local.

Misalkan $f''(x)$ ada sepanjang interval $(a, b) \ni c$ dan $\boldsymbol{c}$ **titik stasioner** dari f.

- Bila $\boldsymbol{f''(c) < 0}$ maka c merupakan titik **maksimum local.**
- Bila $\boldsymbol{f''(c) > 0}$ maka c merupakan titik **minimum local.**

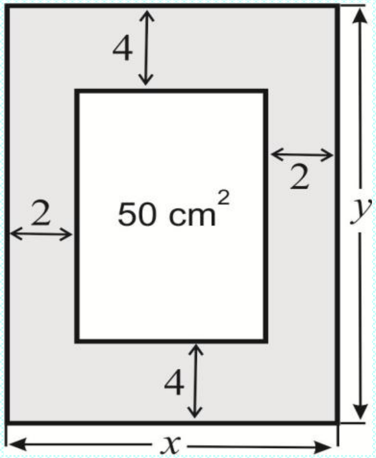
Perhatikan bahwa teorema di atas hanya dapat dipakai menguji titik stasioner.

Latihan: Tentukan semua titik ekstrim lokal dari

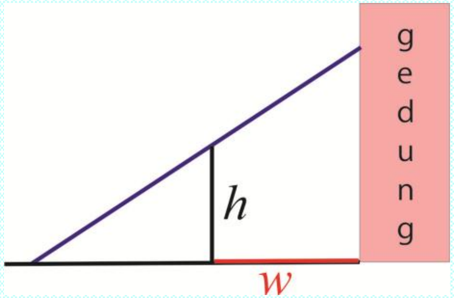
a. $f(x) = x^2 - 6x + 5$ b. $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$ ψ

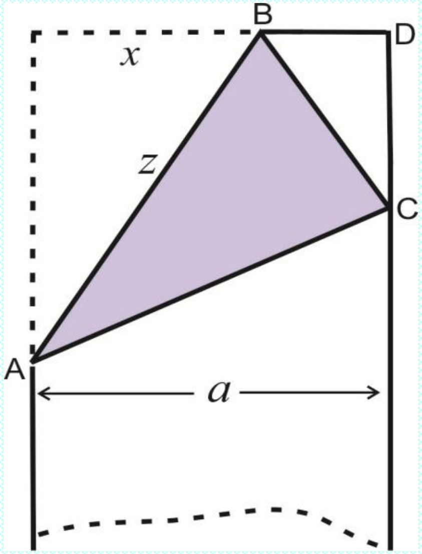
Latihan

1. Tentukan titik-titik ekstrim dari:
   a. $f(x) = x^4 - 4x$ b. $f(x) = \frac{x}{x^3+2}$
2. Sebuah surat akan diketik pada kertas dengan batas-batas seperti pada gambar di samping. Bila luas tulisan $50\ \text{cm}^2$, Berapa ukuran x dan y supaya luas kertas seminimum mungkin. ψ



3. Anton berada di perahu dayung 2 km dari titik terdekat B pada sebuah pantai. Ia melihat rumahnya yang terletak di pantai, 6 km dari titik B, sedang terbakar. Bila Anton dapat mendayung dengan laju 6 km/jam dan berlari 10 km/jam, Tentukan jalur yang harus diambilnya supaya secepat mungkin sampai di rumah. ψ
4. Tentukan ukuran sebuah tabung lingkaran tegak yang volumenya sebesar mungkin yang dapat ditempatkan di dalam sebuah kerucut berukuran tinggi a cm dan jari-jari alas b cm. ψ
5. Pagar setinggi h meter berdiri sejajar sebuah gedung tinggi, sejauh w meter darinya. Tentukan panjang tangga minimum yang dapat digunakan agar ujung-ujungnya menyentuh tanah dan dinding gedung. ψ

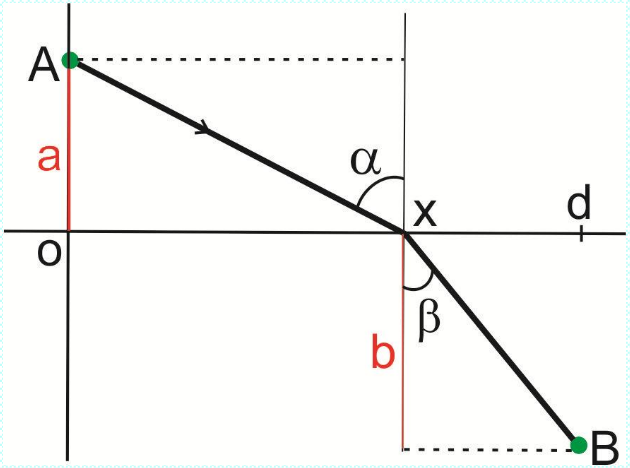




6. Secarik kertas berbentuk persegi panjang dengan lebar a, salah satu sudutnya dilipat seperti pada gambar di samping kiri. Tentukanlah x agar:
   a. Luas segitiga BCD maksimum.
   b. Luas segitiga ABC minimum.
   c. panjang z minimum. ψ

7. Prinsip Fermat dalam optik mengatakan bahwa cahaya melintas dari titik A ke B sepanjang jalur yang memerlukan waktu tersingkat. Misalkan cahaya melintas di medium satu dengan kecepatan c_1 dan di medium kedua dengan kecepatan c_2. Perlihatkan bahwa

$$\frac{\sin\alpha}{c_1} = \frac{\sin\beta}{c_2}$$ ψ



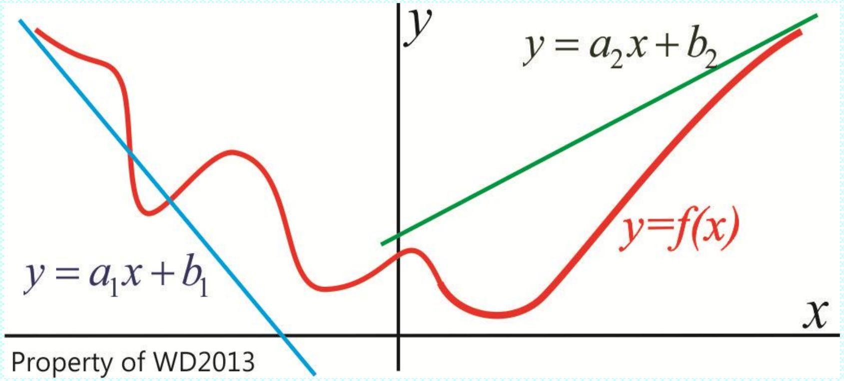
Asimptot Miring

Pada pembahasan limit di takhingga dan limit tak hingga, telah dikaji asimptot datar dan asimtot tegak. Pada bagian ini akan dikaji asimptot miring.

Definisi: Misalkan f fungsi real. Garis $\boldsymbol{y = ax + b}$, $a \neq 0$ disebut **asimptot miring** dari f bila memenuhi salah satu dari kondisi berikut:

a. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - (ax + b) = 0$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (ax + b) = 0$



Lakukan prosedur berikut menentukan asimptot miring

- Hitung $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, bila hasilnya berhingga dan bukan nol, maka hasilnya adalah a.
- Hitung $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax$, bila hasilnya berhingga, maka hasilnya adalah b. Δ

Ulangi dua langkah di atas guna menentukan asimptot miring untuk $x \to -\infty$

Contoh: Tentukan semua asimptot dari $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$ Δ

Menggambar Grafik Fungsi Secara Cermat

Pada pasal ini kita akan menggunakan hasil-hasil yang telah diperoleh pada beberapa pasal sebelumnya untuk menggambar grafik fungsi secara cermat. Berikut ini disajikan langkah-langkah umum untuk menggambar grafik fungsi f secara cermat:

- Tentukan daerah definisi dari f.
- Tentukan perpotongan f dengan sumbu-sumbu koordinat.
- Periksa kesimetrian grafik f, apakah fungsi gasal atau fungsi genap.
- Gunakan uji turunan pertama untuk menentukan daerah kemonotonan dan titik-titik ekstrim dari f.
- Gunakan uji turunan kedua untuk menentukan daerah kecekungan dan titik bali/belok dari f.
- Tentukan semua asimptot dari f.
- Gambar grafik f.

Latihan: Gambar grafik dari $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$ Δ

Latihan

1. Tentukan semua asimptot (datar, tegak, miring) dari:

   a. $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ b. $f(x) = \frac{2x^4-3x^3-2x-4}{x^3-1}$

2. Gambar sebuah grafik fungsi yang memenuhi semua kriteria kerikut:

   a. f kontinu di seluruh $\mathbb{R}$ b. $f(2) = -3$ dan $f(6) = 1$

   c. $f'(2) = 0$ dan $f'(6) = 3$ d. $f'(x) > 0$ untuk $x \neq 2$

   e. $f''(6) = 0$ dan $f''(x) > 0$ untuk $2 < x < 6$ f. $f''(x) < 0$ untuk $x > 6$ Ψ

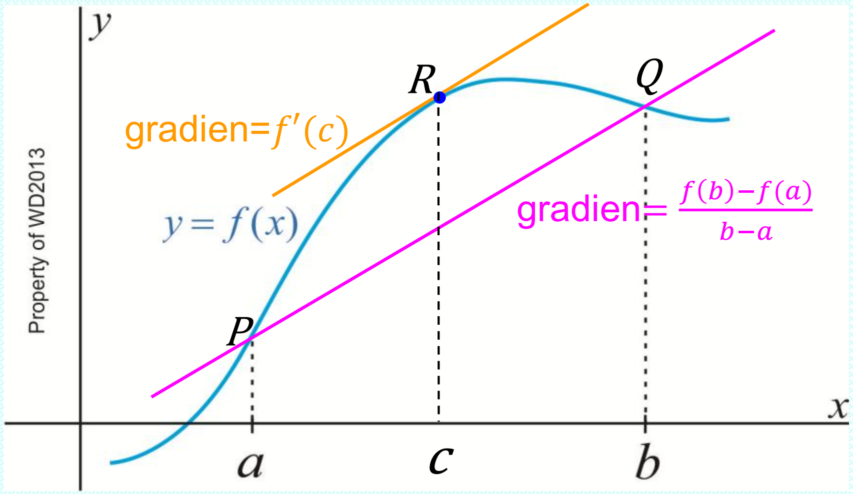
3. Sketsakan grafik fungsi:

   a. $f(x) = \frac{4x}{x^2+2}$ b. $f(x) = \frac{3x^5-20x^3}{20}$ Ψ

Bu Atoen pergi mengendarai mobil dari Bandung ke Pangandaran yang jaraknya 301 km. Waktu perjalanan adalah 5 jam. Menurut pengamatan Bu Atoen, laju kendaraannya tidak pernah melebihi 60 km/jam. Apakah hal ini masuk akal?

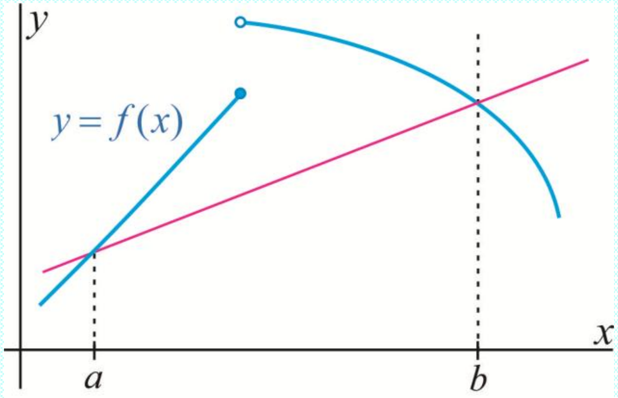
Perhatikan fungsi kontinu f pada $[a, b]$.
Gambar garis tali busur $\overline{PQ}$.
Geser $\overline{PQ}$ ke atas atau ke bawah sampai menyinggung grafik f di titik $R(c, f(c))$.

Diperoleh $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

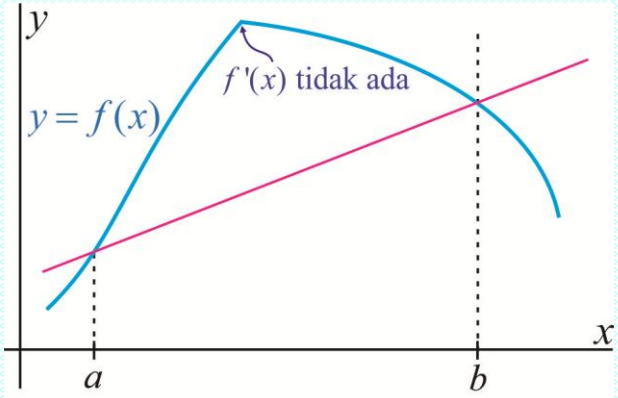


Teorema Nilai Rata-Rata (turunan)

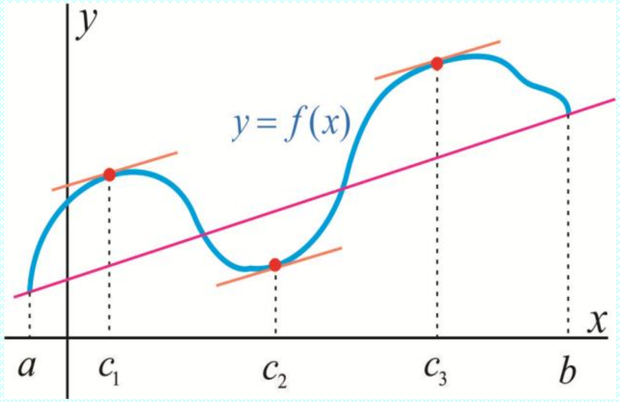
Misalkan f kontinu sepanjang $[a, b]$ dan $f'(x)$ ada sepanjang (a, b), maka **terdapat titik** $\boldsymbol{c} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ sehingga $\boldsymbol{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$ Δ



TNR gagal Karena
f tidak kontinu.



TNR gagal Karena
f tidak diferensiabel di (a, b)



Titik yang memenuhi TNR
bisa lebih dari satu

Latihan:

1. Carilah titik c yang memenuhi teorema nilai rata-rata:
   a. $f(x) = 2\sqrt{x}$ pada $[1,4]$ Δ b. $f(x) = x^{2/3}$ pada $[-8,27]$ Δ
2. Bu Atoen pergi mengendarai mobil dari Bandung ke Jakarta yang jaraknya 180 km. Waktu perjalanan adalah 3 jam. Menurut pengamatan Bu Atoen, laju kendaraannya selalu kurang dari 60 km/jam. Tunjukkan speedometer mobilnya sudah tidak akurat. Δ

- Konsep anti turunan merupakan kebalikan dari proses turunan.
- Diberikan fungsi f, akan dicari fungsi F, sehingga $F'(x) = f(x)$.
- Ilustrasi masalah-masalah yang memerlukan konsep anti turunan:

1. Sebuah mobil berangkat dari kota Bandung menuju kota Rengasdengklok dengan laju

$$V(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le 10 \\ 20, & 10 < t \le 7200 \\ 20 - 4(t - 7200), & 7200 < t \le 7205 \end{cases} \quad \text{meter/detk}$$

Berapa jarak tempuhnya setelah bergerak 500 detik ? Δ

2. Tentukan kurva-kurva yang kemiringan garis singgungnya di setiap titik selalu dua kali absisnya. Δ

3. Sebuah gelas berisi air medidih diletakkan dalam ruangan yang temperaturnya $20°$ C. Hukum Newton mengatakan laku perubahan temperatur air, $y(t)$, memenuhi hubungan $\frac{dy}{dt} = 0{,}1(y - 20)$. Tentukan temperatur air tersebut setelah 40 detik. Δ

Anti turunan dari fungsi f, dinotasikan $\boldsymbol{A(f)}$ atau $\int \boldsymbol{f(x)\,dx}$ adalah fungsi $\boldsymbol{F}$ yang memenuhi hubungan $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$.

Fungsi $F(x) = x^2$, $G(x) = x^2 + 1$, dan $H(x) = \mathrm{x}^2 - 5$, semuanya merupakan anti turunan dari $f(x) = 2x$. Secara umum $\int x^2 dx = x^2 + c$, dengan $c \in \mathbb{R}$.

==> Untuk selanjutnya yang dimaksud anti turunan adalah anti turunan umum.

Teorema Ketunggalan Anti Turunan:

Misalkan F dan G masing-masing anti turunan dari f, jadi $F'(x) = G'(x)$ maka terdapat konstanta k sehingga $F(x) = G(x) + k$.

Sifat-sifat

a. Misalkan $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq -1$, maka $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$

b. Misalkan $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq -1$, maka $\int u^r u'(x)\,dx = \frac{u^{r+1}}{r+1} + c$

c. $\int \sin x\ dx = \cos\ x + c$

d. $\int \cos x\ dx = \sin x + c$

e. $\int k\, f(x) dx = k \int f(x) dx$

f. $\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

g. $\int (f-g)(x)\,dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

Latihan

1. Tentukan anti turunan dari soal-soal berikut

a. $\int \left(\frac{4}{x^5} - \frac{3}{x^4}\right)\, dx$ Δ b. $\int \frac{4x^6+3x^5-8}{x^5}\, dx$ Δ c. $\int (5x^3 - 18)^7\, 15x^2 dx$ Δ

d. $\int 3t\, \sqrt[3]{2t^2 - 1}\, dx$ ψ e. $\int \sin^{10} x\, \cos x\, dx$ ψ f. $\int |x|\, dx$ ψ

g. $\int \sin^2 x\, dx$

2. Lakukan proses anti turunan dua kali untuk mendapatkan fungsi asalnya

a. $f''(x) = \sqrt{x}$ b. $f''(x) = \frac{x^4+1}{x^3}$ c. $f''(x) = 2\sqrt[3]{x+1}$

- Persamaan diferensial, disingkat PD, adalah persamaan yang melibatkan turunan dari sebuah fungsi.
- Contoh: a. $y' = x^2 \sin x$ b. $y' + 2xy = \sin x$
  c. $y'' + 3y' + 4y - \cos x = 2$ d. $y''' + 3x^2 y' = 2y^5$
- **Orde** sebuah PD adalah **turunan tertinggi** yang terlibat dipersamaannya.
- Masalah: Mencari fungsi $y = f(x)$ yang merupakan solusi PD tersebut.
- **Tidak ada** metode umum untuk mencari solusi PD.
- Pada pasal ini akan dibahas **Metode Pemisahan Variabel.**

Contoh: Tentukan solusi dari $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+6x^2}{y^2}$, $y(0) = 1$

- $y^2 dy = (2x + 6x^2)\, dx$ (lakukan pemisahan variabel)
- $\int y^2 dy = \int (2x + 6x^2)\, dx$ (lakukan integrasi terhadap kedua ruas)
- $\frac{1}{3} y^3 = x^2 + 2x^3 + c$ (konstanta cukup pada salah satu ruas)
- $y = \sqrt[3]{3x^2 + 6x^3 + 3c}$
- Substitusikan $y(0) = 3$, 1= $\sqrt[3]{0 + 0 + 3c}$, diperoleh $c = 1$
- $y = \sqrt[3]{3x^2 + 6x^3 + 3}$

Solusi Umum dan Solusi Khusus

- Solusi sebuah PD yang masih memuat konstanta disebut **solusi umum**.
- Bila sebuah PD dilengkapi dengan kondisi tertentu, sehingga konstanta pada solusi umumnya dapat ditentukan, hasilnya disebut **solusi khusus**.

Contoh: (Escape Velocity, Purcell edisi 9, halaman 207)

Gaya Tarik yang bekerja pada sebuah benda bermassa m dan berjarak s dari pusat bumi adalah $F = -mgR^2/s^2$, dengan g adalah percepatan gravitasi dipermukaan bumi dan R jari-jari bumi. Tentukan kecepatan awal v_0 yang diperlukan sebuah benda untuk lepas dari gaya Tarik bumi.

Gunakan hukum Newton kedua:

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = m\frac{dv}{ds}v$$

$$m\frac{dv}{ds}v = -mg\frac{R^2}{s^2}$$

$$v\,dv = -gR^2 s^{-2} ds$$

$$\int v\,dv = -gR^2 \int s^{-2} ds$$

$$\frac{v^2}{2} = g\frac{R^2}{s} + c$$

Kondisi awal $v = v_0$ saat $s = R$,

diperoleh $c = \frac{1}{2}v_0^2 - gR$.

Jadi $v = \left(\frac{2gR^2}{s} + v_0^2 - 2gR\right)^{\frac{1}{2}}$

Agar terlepas dari gaya gravitasi bumi, v harus selalu positif, dan hal ini dapat dicapai bila $v_0 \geq \sqrt{2gR}$

Latihan

1. Tunjukkan fungsi yang diberikan merupakan solusi PD yang bersangkutan,
   a. $y = \sqrt{4 - x^2}, \quad \frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = 0$ ψ b. $y = A\cos x + B\sin x, \quad y'' + y = 0$ ψ
2. Dari sebuah gedung yang tingginya 100 m, sebuah bola dilempar tegak lurus ke atas dengan kecepatan 200 m/det. Bila percepatan gravitasi g,
   a. Tentukan kecepatan dan posisinya setelah 4 detik.
   b. Berapa tinggi maksimum yang dicapai bola?
   c. Berapa waktu yang dibutuhkan untuk sampai di lantai? ψ
3. Tentukan persamaan kurva yang melalui $(1,2)$, dan kemiringan garis singgungnya selalu dua kali absisnya. ψ
4. Tentukan persamaan kurva yang melalui $(1,2)$, dan kemiringan garis singgungnya selalu setengah kuadrat ordinatnya. ψ
5. Dapatkah PD $y' + x^2 y = \sin(xy)$ diselesaikan dengan pemisahan variabel?

The End Of

CHAPTER 3

BAB 4

Integral Tentu

Pengantar

- Ada dua masalah geometri yang erat kaitannya dengan ilmu kalkulus, yaitu masalah mencari garis singgung yang berhubungan dengan konsep turunan, dan masalah menghitung luas daerah yang berhubungan dengan integral tentu. Tentu saja aplikasi dari konsep turunan dan integral tentu tidak terbatas pada masalah geometri saja. Banyak sekali aplikasi yang penyelesaiannya memerlukan kedua konsep tersebut.

- Pada bab ini akan dibahas kajian teoritik yang melandasi konsep integral tentu. Sebagaimana pada bab-bab sebelumnya, penyajian diusahakan dapat diserap dengan lebih mudah memakai bantuan gambar-gambar dan program animasi. Pada bab berikutnya baru akan dibahas berbagai aplikasi dari konsep integral.

Notasi Sigma

- Notasi sigma digunakan untuk menyingkat penulisan sebagai berikut:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \qquad a_k \in \mathbb{R}$$

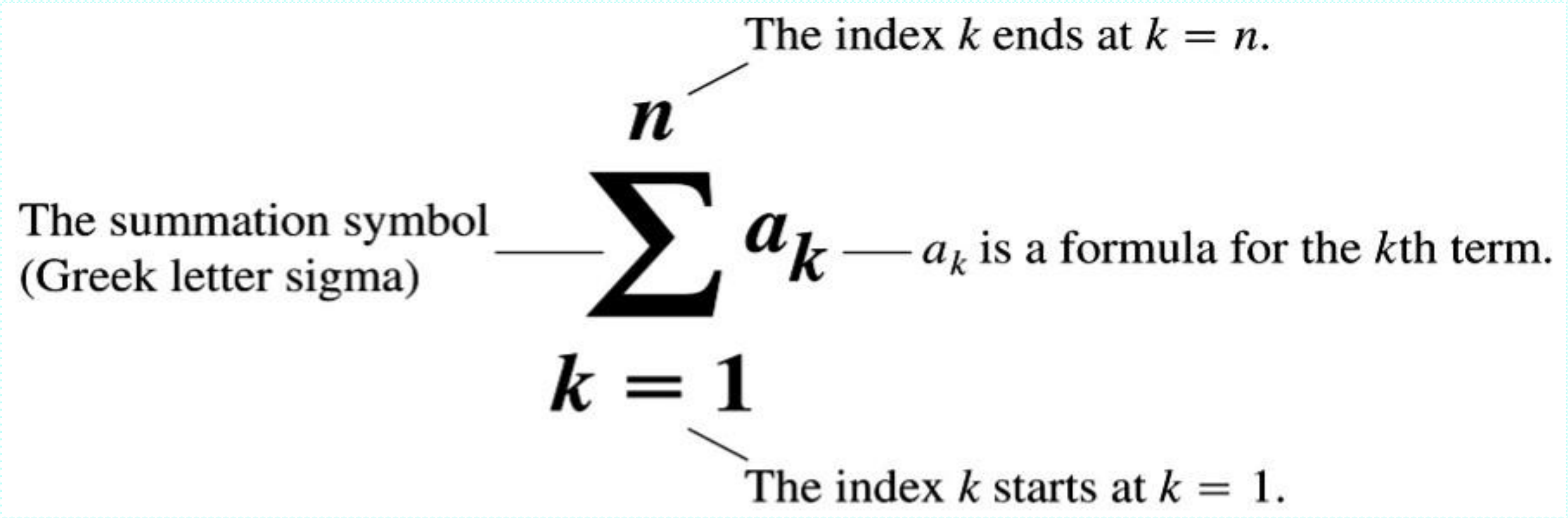
- Dengan notasi tersebut, maka berlaku hubungan berikut,

a. $\sum_{k=1}^{n} 1 = \cdots$

b. $\sum_{k=1}^{n} c = \cdots$

c. $\sum_{k=1}^{n} c a_k = c \ \sum_{i=1}^{n} a_i$

d. $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$



Beberapa jumlah khusus yang diperlukan pada hitungan integral tentu:

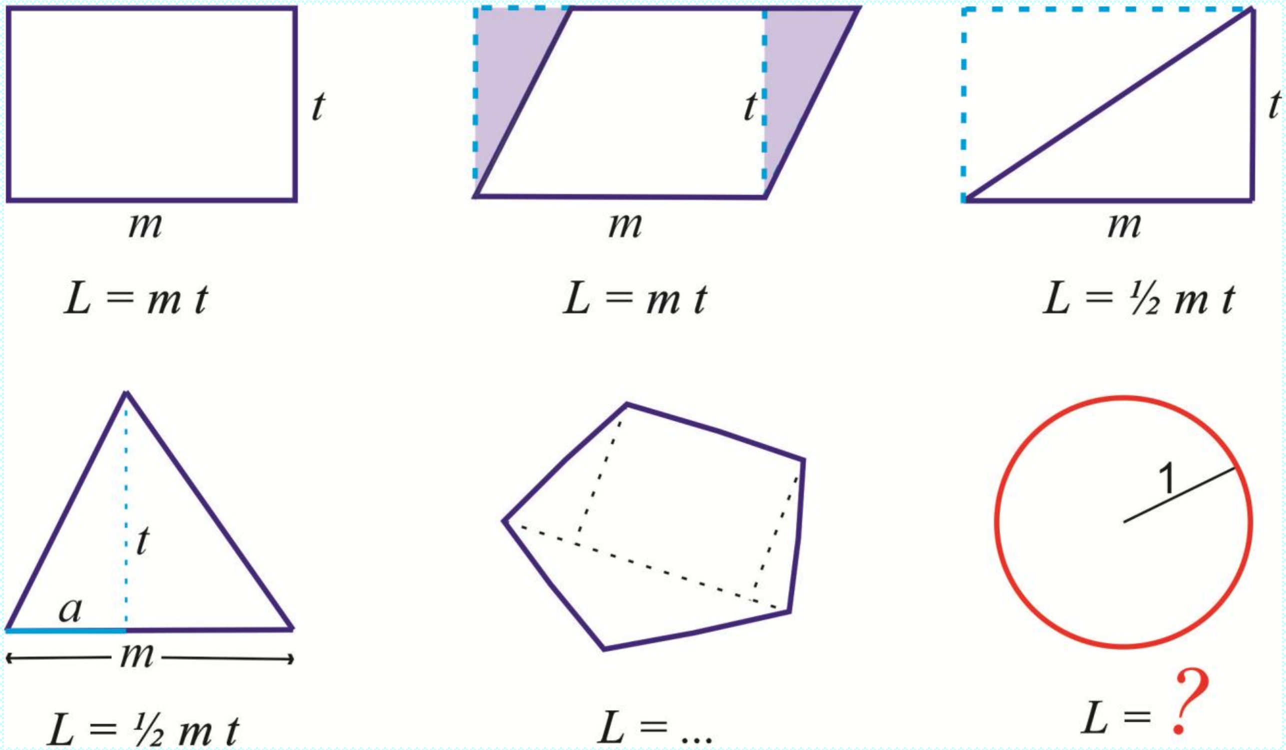
1. $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$

3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2$

Latihan: Tentukan nilai dari $\sum_{i=1}^{n}[(i-1)\cdot(4i+3)]$ sebagai fungsi dari n. ψ

- Luas daerah mula-mula didefinisikan untuk persegi panjang.
- Selanjutnya luas segitiga, jajaran genjang, trapezium, dan poligon dirumuskan dari luas persegi panjang.



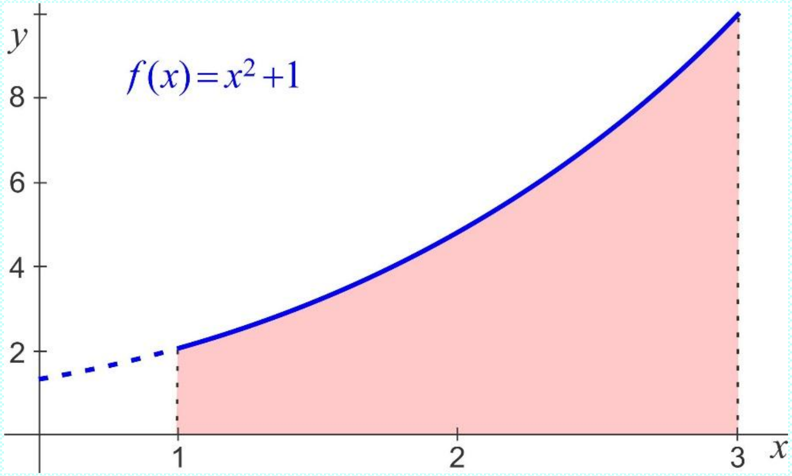
Bagaimana cara menghitung luas lingkaran?

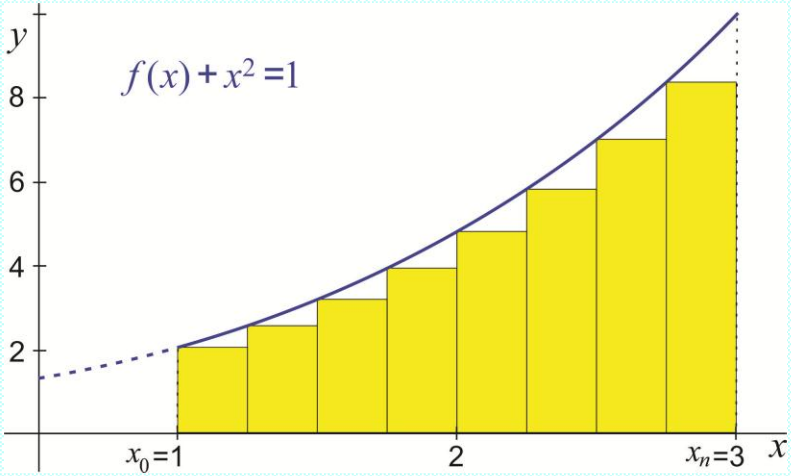
Archimedes sekitar 287 SM melakukannya sebagai berikut:

- Pendekatan luas ⊙ satuan berdasarkan poligon-poligon dalam. Δ
- Pendekatan luas ⊙ satuan berdasarkan poligon-poligon luar. Δ
- Kesimpulan: luas lingkaran satuan adalah π

Hampiran Luas Memakai Jumlah Riemann

- Ide Achimedes akan kita perumum untuk menghitung luas daerah di bidang.
- Perhatikan sebuah daerah yang dibatasi oleh grafik $f(x) = x^2 + 1$, garis $x = 1$, garis $x = 3$ dan sumbu x.
- Berbeda dengan Achimedes yang menggunakan poligon, kita akan menghampiri luas daerah tersebut dengan persegi panjang – persegi panjang

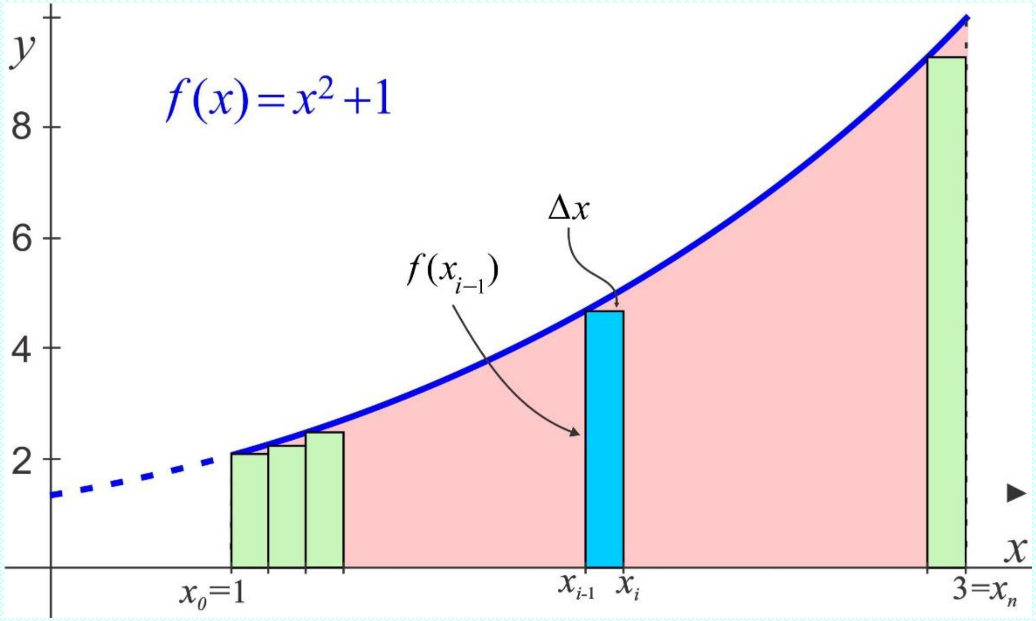




- Berdasarkan cara pembentukan persegi panjangnya, dikenal tiga macam hampiran luas, yaitu:

  a. Left Riemann Sum Δ b. Right Riemann Sum Δ c. Center Riemann Sum Δ
- Hampiran Jumlah Riemann (Riemann Sum) akan semakin "baik" bila persegi panjangnya dibuat "kurus-kurus".

Perhitungan Luas Memakai Left Riemann Sum (LRS)



- Diberikan daerah yang dibatasi grafik $f(x) = x^2 + 1$, garis $x = 1$, garis $x = 3$ dan sumbu x.
- Misalkan luasnya L
- Luas daerah tersebut akan dihampiri dengan metode Left Riemann Sum

- Bentuk partisi $\mathcal{P} : 1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 3$
- $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}, \quad x_i = 1 + i\,\Delta x = 1 + \frac{2i}{n}$
- Perhatikan subinterval ke i, yaitu $[x_{i-1}, x_i]$
- Bentuk persegi panjang dengan lebar Δx dan tinggi $f(x_{i-1})$
- Luas persegi panjang tersebut, $\Delta S_n = f(x_{i-1})\,\Delta \mathrm{x}$
- Lakukan proses pembentukan persegi panjang ini untuk $i = 1, 2, \cdots, n$

- Luas seluruh persegi panjang-persegi panjang tersebut:

$$S_n = f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta \mathrm{x}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(x_{i-1}^2 + 1\right) \Delta \mathrm{x}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\left(1 + \frac{2(i-1)}{n}\right)^2 + 1 \right) \frac{2}{\mathrm{n}}$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\left(1 + \frac{4(i-1)}{n} + \frac{4(i-1)^2}{n^2}\right) + 1 \right)$$

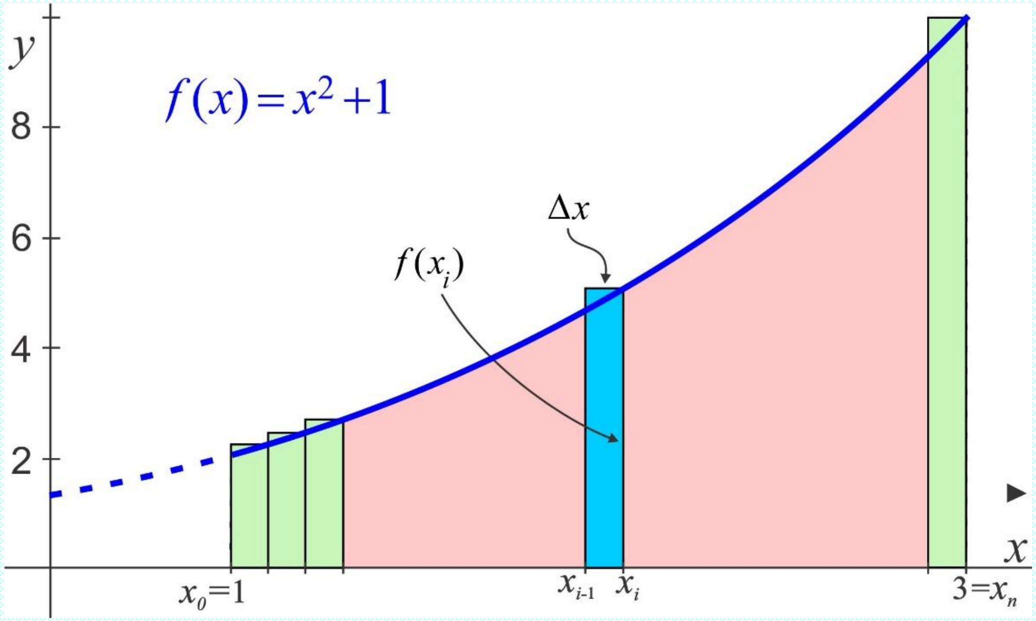
$$= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(2 + \frac{4i}{n} - \frac{4}{n} + \frac{4i^2}{n^2} - \frac{8i}{n^2} + \frac{4}{n^2}\right)$$

$$= \frac{2}{n} \left(2n + \frac{4}{n}\frac{n(n+1)}{2} - 4 + \frac{4}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{8}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{4}{n}\right)$$

$$= \frac{32}{3} - \frac{8}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

- Untuk setiap n, $S_n \le L$, jadi $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \le \lim\limits_{n\to\infty} L \Leftrightarrow \frac{32}{3} \le L$

Perhitungan Luas Memakai Right Riemann Sum (RRS)



- Diberikan daerah yang dibatasi grafik $f(x) = x^2 + 1$, garis $x = 1$, garis $x = 3$ dan sumbu x.
- Misalkan luasnya L
- Luas daerah tersebut akan dihampiri dengan metode Right Riemann Sum

- Bentuk partisi $\mathcal{P} : 1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 3$
- $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}, \quad x_i = 1 + i\,\Delta x = 1 + \frac{2i}{n}$
- Perhatikan subinterval ke i, yaitu $[x_{i-1}, x_i]$
- Bentuk persegi panjang dengan lebar Δx dan tinggi $f(x_i)$
- Luas persegi panjang tersebut, $\Delta T_n = f(x_i)\,\Delta \mathrm{x}$
- Lakukan proses pembentukan persegi panjang ini untuk $i = 1, 2, \cdots, n$

- Luas seluruh persegi panjang-persegi panjang tersebut:

$$T_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta \mathrm{x}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + 1\right)\Delta \mathrm{x}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\left(1 + \frac{2i}{n}\right)^2 + 1\right)\frac{2}{\mathrm{n}}$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{4i}{n} + \frac{4i}{n^2} + 1\right)$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(2 + \frac{4i}{n} + \frac{4i^2}{n^2}\right)$$

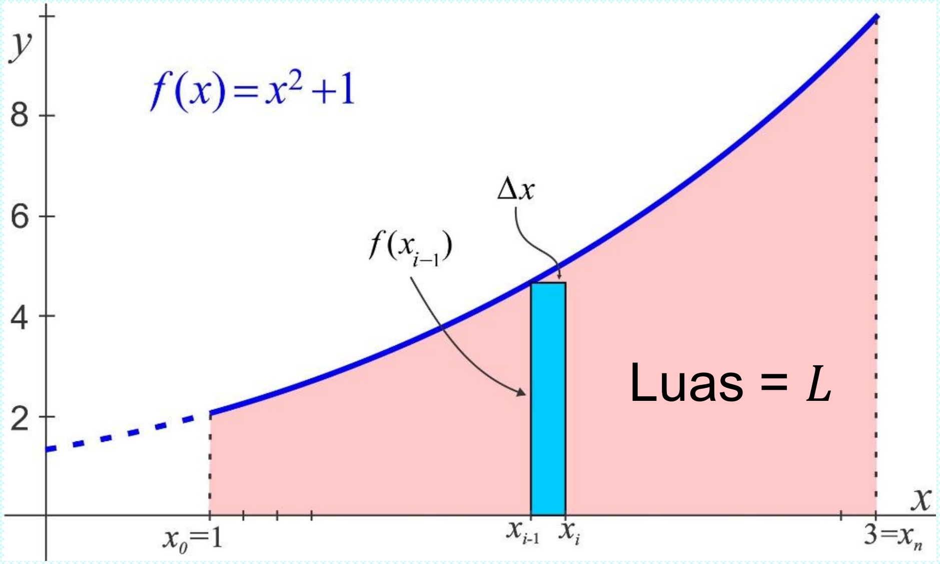
$$= \frac{2}{n}\left(2n + \frac{4}{n}\frac{n(n+1)}{2} - 4 + \frac{4}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

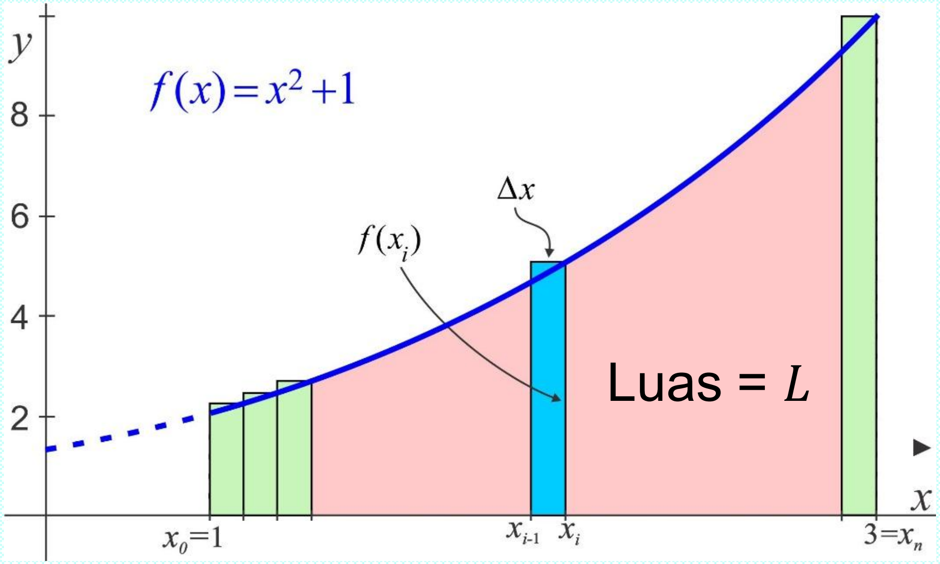
$$= \frac{32}{3} + \frac{8}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

- Untuk setiap n, $L \leq T_n$,

jadi $\lim\limits_{n\to\infty} L \leq \lim\limits_{n\to\infty} T_n \Leftrightarrow L \leq \frac{32}{3}$

Perbandingan Hasil Hitungan Dengan Metode LRS dan RRS





Berdasarkan hitungan LRS: $\frac{32}{3} \le L$

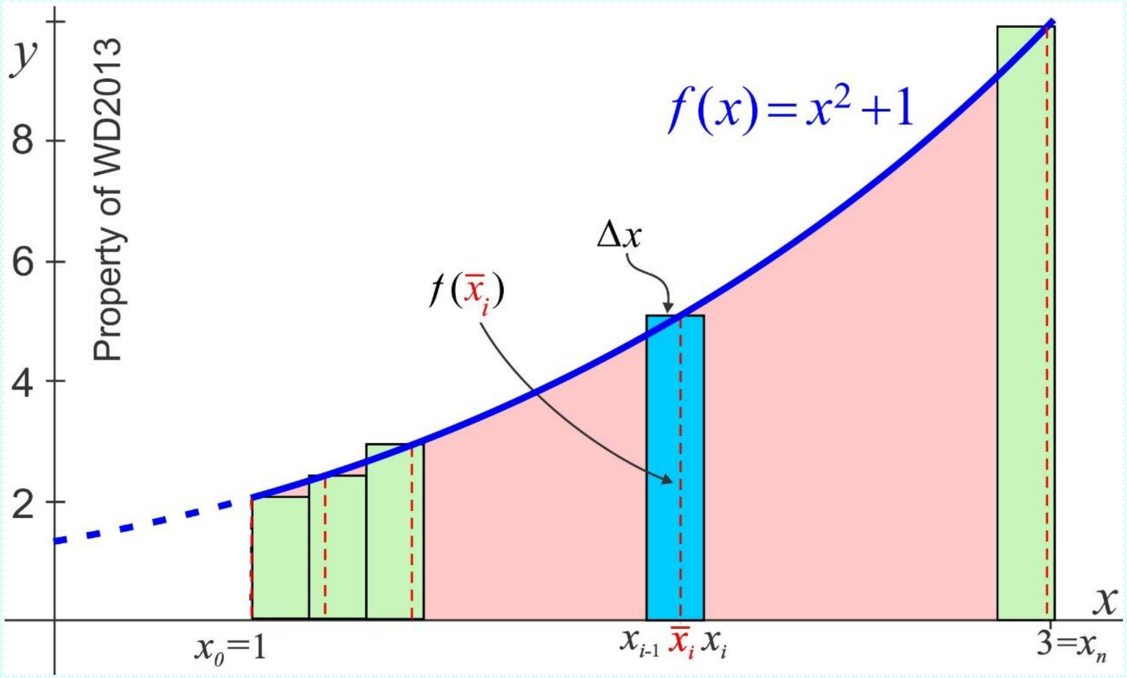
Berdasarkan hitungan RRS: $L \le \frac{32}{3}$

$$\frac{32}{3} \le L \le \frac{32}{3}$$

$$\Updownarrow$$

Luas daerah $L = \frac{32}{3}$

Titik Wakil Tidak Mempengaruhi Hasil Hitungan

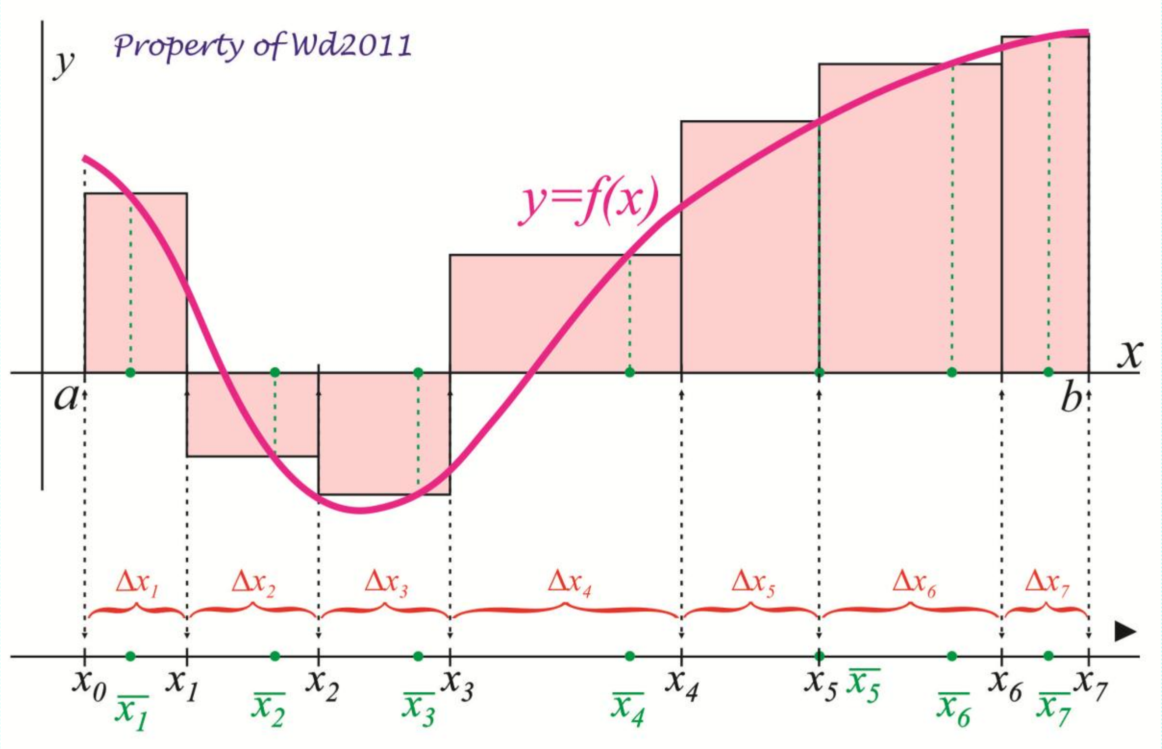


Dari hitungan luas dengan metode LRS dan RRS, terlihat hasilnya tidak bergantung titik wakil $(\bar{x}_i)$ yang digunakan untuk membentuk tinggi persegi panjang-persegi panjang. Pemilihan titik wakil di tiap subinterval boleh bebas.

- Meskipun pemilihan titik wakil ini bebas, tentunya dalam hitungan kita pilih titik wakil yang memudahkan perhitungan.

Latihan: Gunakan motode LRS dan RRS untuk menghitung luas daerah yang dibatasi oleh sumbu x dan grafik-grafik,

a. $y = x^2$, $x = 0$, dan $x = 2$ b. $y = x^3$, $x = 1$, dan $x = 4$



- Pada bagian ini, kita akan memperumum pola dari LRS dan RRS.
- Setelah itu akan didefinisikan konsep integral tentu.
- Perhatikan fungsi f yang terdefinisi sepanjang interval tutup $[a, b]$.

- Partisikan interval $[a, b]$ atas n bagian (tidak perlu sama lebar).
  $\mathcal{P} : 1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 3$, dengan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$
- Pada setiap subinterval, pilih titik wakil $\bar{x}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$
- Bentuk persegi panjang–persegi panjang dengan lebar Δx_i dan tinggi $f(\bar{x}_i)$
- Jumlah Riemann dari fungsi f atas partisi $\mathcal{P}$, $R_{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\, \Delta x_i$

Perhatikan:

- Nilai sebuah jumlah Riemann **tidak tunggal**, bergantung pada **pemilihan banyaknya subinterval**, **lebar tiap subinterval** dan **titik wakil yang digunakan**.
- Jumlah Riemann dapat bernilai negatif karena $f(\bar{x}_i)$ dan Δx_i bisa negatif.
- Jumlah Riemann **tidak sama** dengan luas daerah di bawah / di antara kurva.

Contoh:

1. Tentukan suatu jumlah Riemann dari $f(x) = x^3 + 2x$ pada interval $[1,5]$. ψ
2. Tentukan suatu jumlah Riiemann dari $f(x) = x^2 + 1$ pada interval $[-1,2]$ memakai 6 subinterval yang sama lebar dengan titik wakil adalah ujung kanan setiap interval. ψ

Definisi:

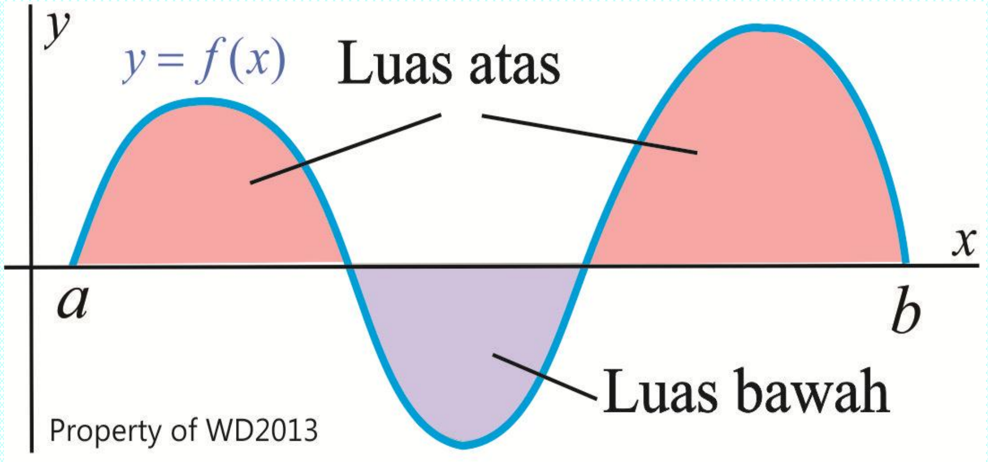
Misalkan fungsi f terdefinisi pada interval $[a, b]$ dengan $\mathcal{P}$, Δx_i, dan $\bar{x}_i$ mempunyai arti seperti pada konsep jumlah Riemann. Misalkan $|\mathcal{P}|$, dibaca Norm $\mathcal{P}$ menyatakan ukuran subinterval yang terlebar. Jika $\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\, \Delta x_i$ ada maka nilainya disebut integral tentu dari fungsi f pada $[a, b]$,

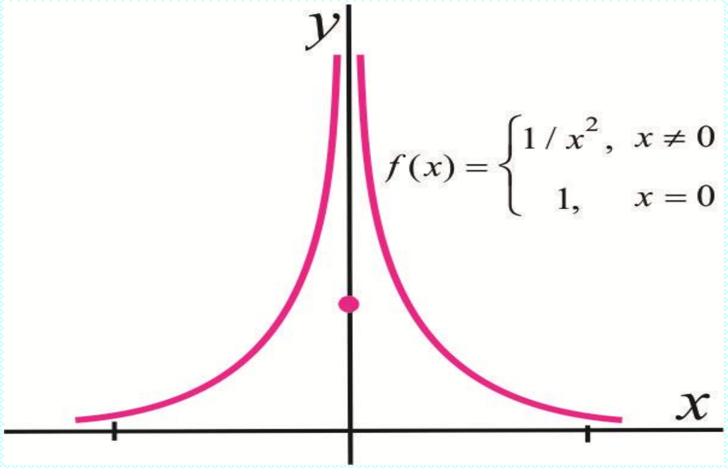
$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\, \Delta x_i$$

- Jelas jika $|\mathcal{P}| \to 0 \Rightarrow n \to \infty$
- Tetapi jika $n \to \infty \not\Rightarrow |\mathcal{P}| \to 0$, beri contoh!
- Kapan $|\mathcal{P}| \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty$?
- Jika .... maka $\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\, \Delta x_i$

Arti geometri integral tentu

$\int_a^b f(x)\, dx$ merupakan luas daerah di atas sumbu x dikurangi luas daerah di bawah sumbu x





Tidak semua fungsi terintegralkan.

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \text{ pada } [-2,2]$$

Bila dihitung, limit jumlah Riemann-nya ∞

- Teorema Eksistensi Integral:
  Bila f terbatas dan kontinu pada interval tutup $[a, b]$, kecuali pada sejumlah hingga titik, maka f terintegralkan.

Sifat-Sifat Integral Tentu

- $\int_a^b 1\, dx = b - a$ $\underline{\Delta}$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\, dx$ $\underline{\Delta}$
- $\int_a^a f(x)\, dx = 0$
- $\int_a^b (kf)(x)dx = k\int_a^b f(x)\, dx$
- $\int_a^b (f \pm g)(x)dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$
- Sifat penambahan selang. Misalkan fungsi f terintegralkan sepanjang interval yang memuat titik-titik a, b, dan c.
  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ $\underline{\Delta}$
- Jika $f(x) < g(x)$, maka $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$ $\underline{\Delta}$
- Misalkan N, M konstanta-konstanta dan $N \leq f(x) \leq M$, maka

$$N(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \ \underline{\Delta}$$

- Fungsi-fungsi berikut terintegralkan sepanjang $[a, b]$
  - Polinom
  - Fungsi rasional, dengan syarat penyebutnya tidak nol sepanjang $[a, b]$.
  - Fungsi $y = \sin x$ dan $y = \cos x$

Latihan:

1. Tentukan nilai integral berikut,

   a. $\int_{-1}^{2} (2x^2 - 8)\, dx$ b. $\int_{-1}^{2} \lfloor x \rfloor\, dx$ Ψ

2. Tuliskan limit berikut sebagai integral tentu

   a. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{4i}{n}} \frac{4}{n}$ Ψ b. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{2i}{n}\right) \frac{2}{n}$ Ψ c. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{3i}{n}\right) \frac{2}{n}$

- Teorema Dasar Kalkulus I memberikan hubungan antara integral tak tentu dengan integral tentu.
- Misalkan fungsi f kontinu pada interval $[a, b]$ dan F suatu anti turunan dari f, maka

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

- Teorema di atas sangat berguna untuk perhitungan integral tentu.

Latihan: Tentukan integral-integral tentu berikut ini,

a. $\int_{-1}^{2}(2x^2 - 8)\,dx$ ψ   b. $\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+6)^2}\,dx$ (substitusi $u = x^2 + 2x + 6$) ψ

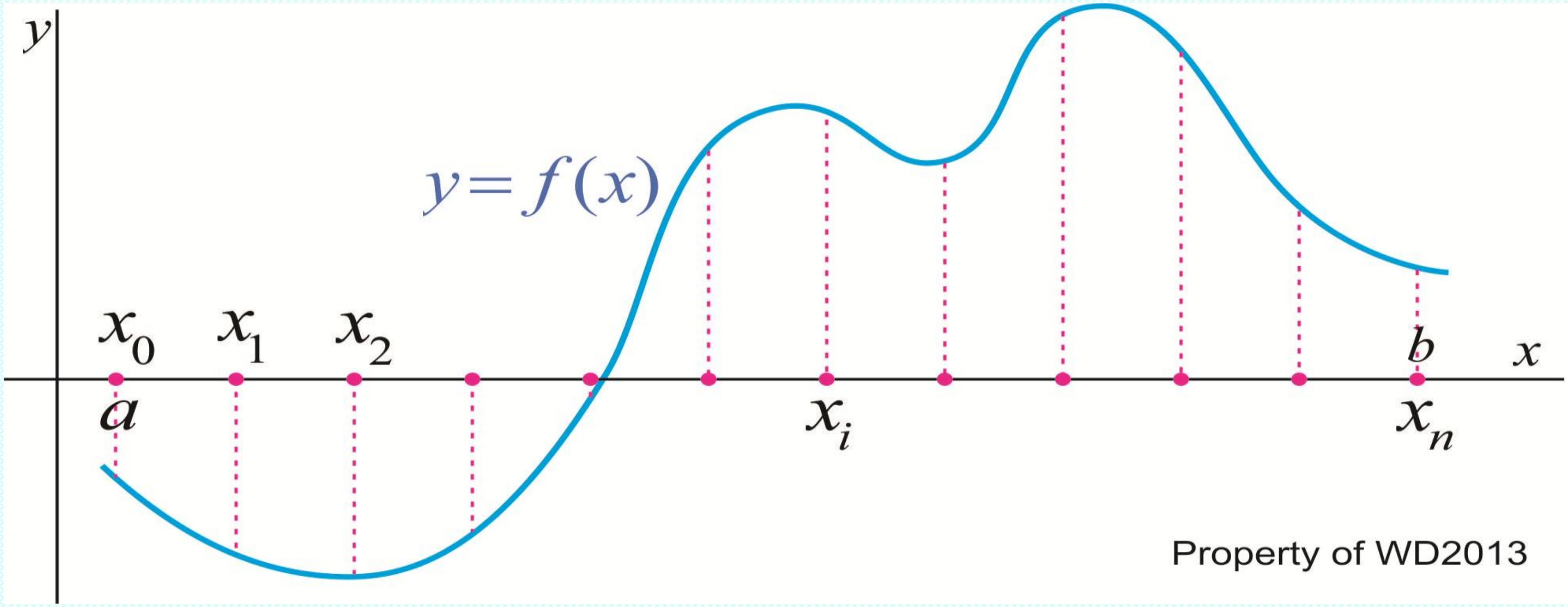
- Perhatikan $\int_0^x 3t^2 dt = t^3]_0^x = x^3$
- Ilustrasi di atas menunjukan bahwa bentuk $\int_a^x f(t)\, dt$ merupakan sebuah fungsi dari x (**bukan fungsi dari t**).
- Teorema dasar Kalkulus II memberikan aturan untuk menurunkan fungsi seperti di atas.
- Misalkan f kontinu pada interval tutup $[a, b]$ dan $x \in (a, b)$, maka

$$D_x\left[\int_a^x f(t)\, dt\right] = f(x)$$

Latihan: Tentukan turunan dari,

a. $\int_1^x \sin\sqrt{t}\, dt$ $\underline{\psi}$ b. $\int_1^{x^2} \sin\sqrt{t}\, dt$ $\underline{\psi}$ c. $\int_{-2x}^{x^3} \sin\sqrt{t}\, dt$ $\underline{\psi}$

Nilai Rata-Rata Fungsi



- Misalkan fungsi f terintegralkan sepanjang $[a, b]$
- Partisikan $[a, b]$ atas n bagian dengan sama lebar, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- Nilai rata-rata dari fungsi f pada titik-titik x_i, $i = 1, 2, \cdots, n$

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

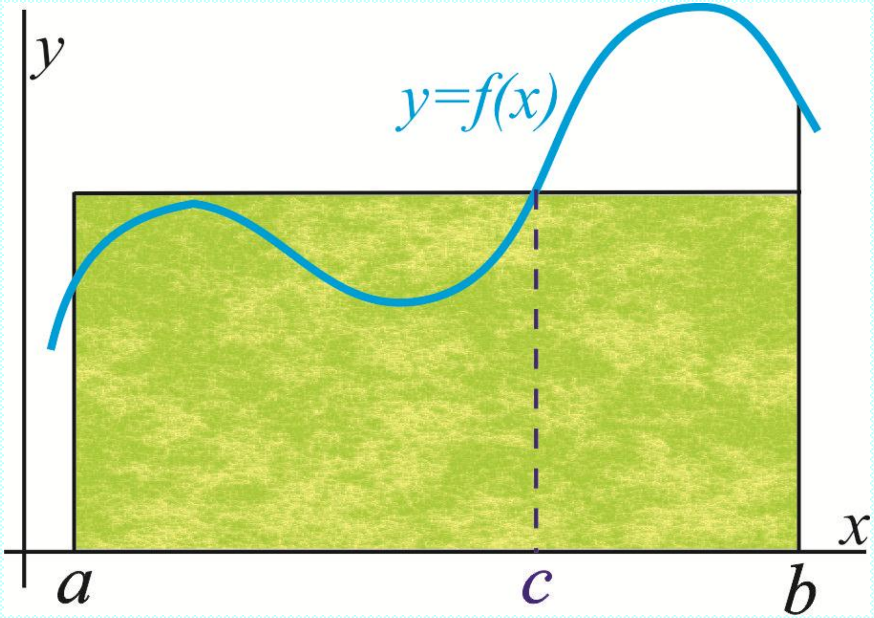
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}=\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n}$$

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}=\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

- Untuk $n \to \infty$, ruas kiri dinamakan nilai rata-rata fungsi, av(f), sedangkan ruas kanan sama dengan $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$
- Nilai rata-rata fungsi f sepanjang interval $[a,b]$ adalah

$$\text{av}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Latihan: Tentukan nilai rata-rata fungsi dari $f(x)=x^3$ pada $[1,3]$



Misalkan fungsi f kontinu sepanjang $[a,b]$, maka terdapat titik $c \in [a,b]$ yang memenuhi

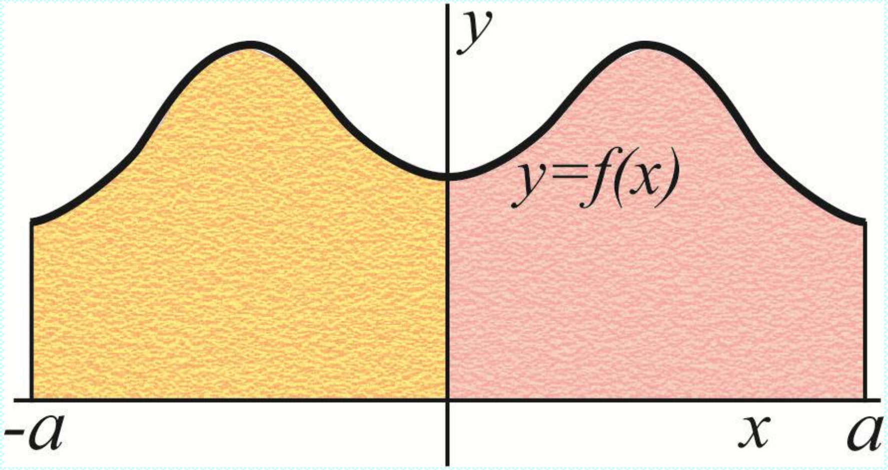
$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \quad \underline{\Omega}$$

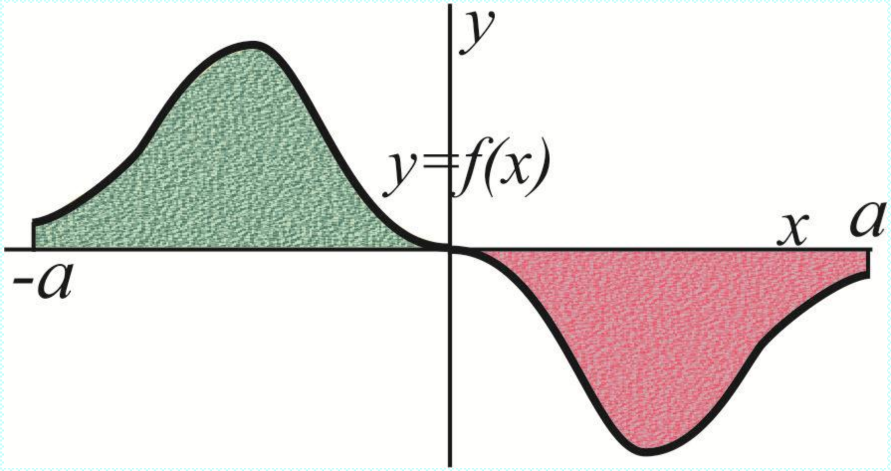
Teorema di atas mengatakan bahwa ada titik c yang nilai fungsinya, $f(c)$, sama dengan nilai rata-rata fungsi f pada $[a,b]$.

Latihan:

1. Tentukan bilangan real c yang memenuhi TNR integral dari $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$ sepanjang $[0.3]$.

2. Misalkan f kontinu sepanjang $[a,b]$ dan $\int_a^b f(x)\, dx = 0$. Tunjukkan f mempunyai akar pada $[a,b]$



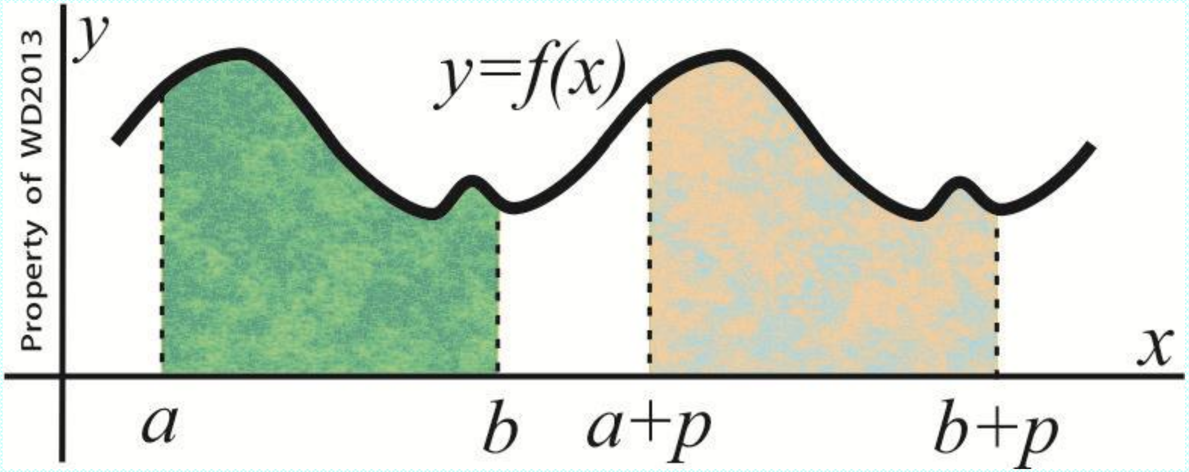


Bila f fungsi genap maka

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Bila f fungsi gasal maka

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$



Bila f fungsi periodik dengan periode p, maka

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a+p}^{b+p} f(x)dx$$

Latihan

1. Hitung nilai integral berikut

   a. $\int_2^3 (x^3 - 3x^2 + 3\sqrt{x})\, dx$ b. $\int_1^5 \frac{y^2-1}{(y^3-3y)^2}\, dy$ c. $\int_{-2}^3 \lfloor x \rfloor\, dx$

2. Tentukan daerah kemonotonan dari $f(x) = \int_0^{x^2} \frac{1+t}{1+t^2}\, dt$ Ψ

3. Misalkan f fungsi gasal dengan $\int_0^1 f^2(x)\, dx = 1$,

   tentukan $\int_{-1}^1 (f^2(x) + x^2 f(x) + f^3(x))\, dx$ Ψ

4. Tentukan $f'(x)$ dari,

   a. $f(x) = \sin x \cdot \int_1^{x^2} \cos t\, dt$ Ψ b. $f(x) = \int_x^1 x^2\sqrt{u^2+1}\, du$ Ψ

5. Tentukan $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{4+\frac{3i}{n}}\right)^2 \frac{4}{n}$ Ψ

6. Terapkan Teorema Dasar Kalkulus untuk menghitung $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{4i}{n}} \frac{4}{n}$ Ψ

- Perhatikan tiga masalah berikut:

  a. Tentukan solusi dari persamaan $x^2 = \ln x$

  b. Tentukan nilai dari $\int_1^2 e^{x^2}\,dx$

  c. Tentukan solusi dari sistem persamaan

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + \cdots + 2x_{10} = 25 \\ 4x_1 - 8x_2 + 5x_3 + \cdots - 5x_{10} = 53 \\ \vdots \\ 7x_1 - 9x_2 + 7x_3 + \cdots + 2x_{10} = 14 \end{cases}$$

- Ketiga masalah di atas sukar sekali untuk diselesaikan secara analitis.
- Alternatif penyelesaian memakai teknik hampiran.
  Prosedur hampiran ini dinamakan **metode numerik**.
- Meskipun hasil dari metode numerik hanya berupa hampiran, tetapi keakuratannya terhadap solusi eksak selalu dapat dikontrol.

- Dalam perhitungan $\int_a^b f(x)\,dx$ umumnya kita menghadapi tiga jenis fungsi.

  a. $f(x)$ fungsi sederhana (anti turunannya mudah ditentukan).

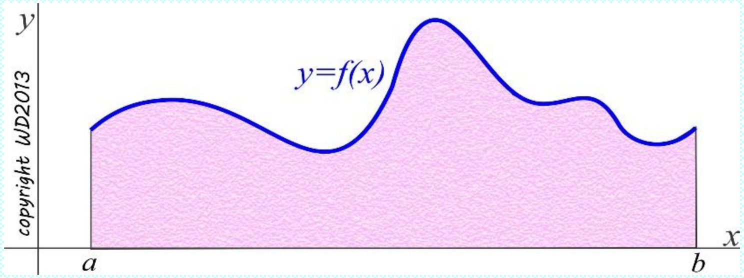
  b. $f(x)$ fungsi yang rumit (anti turunannya sukar untuk ditentukan)

  c. $f(x)$ hanya diketahui berupa table data, misalnya dari sebuah percobaan.

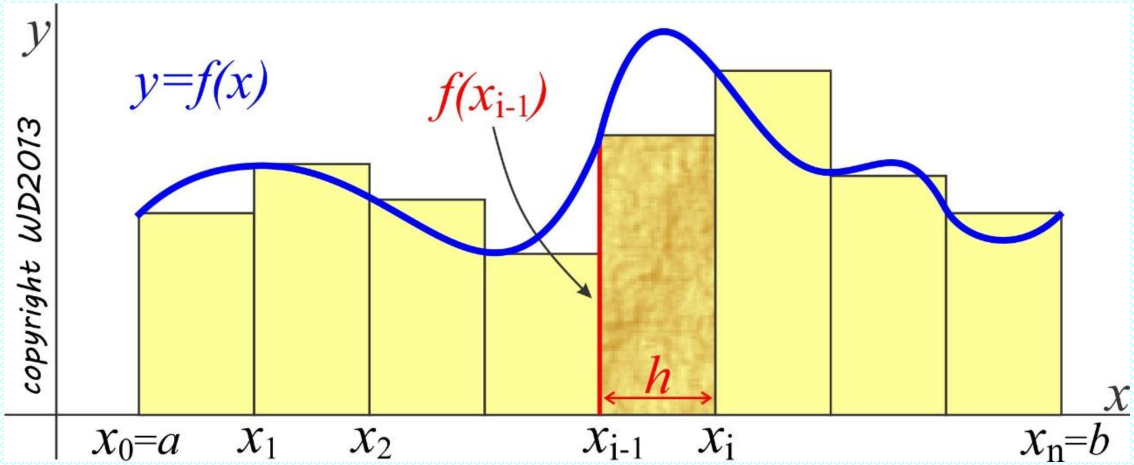
  berikan contoh dari masing-masing jenis fungsi di atas.

- Kasus (a) biasanya diselesaikan secara analitik, sedangkan kasus (b) dan (c) diselesaikan memakai metode numerik.

- Ada banyak sekali metode numerik untuk menyelesaikan masalah integral. Pada perkuliahan ini, kita hanya akan membahas metode-metode:
  - Metode Persegi Panjang / Riemann
  - Metode Trapesium
  - Metode Simpson / Parabol



Metode Persegi Panjang Kiri / Left Riemann Sum (LRS)



Misalkan f terdefinisi di $[a, b]$.
Bentuk partisi (sama lebar):

$\mathcal{P} : 1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

sebut $h = \Delta x = \frac{b-a}{n}$

- Pada setiap interval $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \cdots, n$ bentuk persegi panjang dengan "panjang" $f(x_{i-1})$ (nilainya bisa negatif) dan lebar h.
- "Luas" persegi panjang ke i, $\Delta L_i = h \cdot f(x_{i-1})$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\, dx$$

$$\approx h\, f(x_0) + h\, f(x_1) + \cdots + h\, f(x_{n-1})$$

Hitungan terakhir disebut hampiran / metode Persegi Panjang Kiri.

Galat Metode Persegi Panjang Kiri (LRS)

- Galat (*Error*) adalah besaran yang mengukur ketelitian suatu hampiran.

Galat = Nilai Eksak - Nilai Hampiran

- Galat metode LRS:

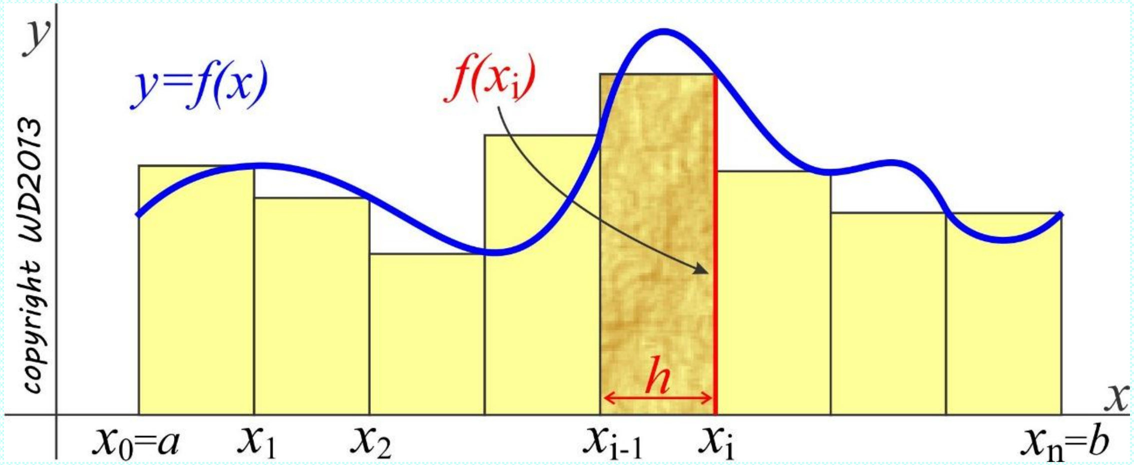
$$E_n = \int_a^b f(x)\,dx - (h\,f(x_0) + h\,f(x_1) + \cdots + h\,f(x_{n-1}))$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2n} f'(c)$$ dengan c diantara a dan b

- Secara umum nilai $\boldsymbol{E_n}$ **tidak dapat ditentukan** karena titik c tidak diketahui, akan tetapi **batas atas dari galat selalu dapat dihitung**.

Contoh:

1. Terapkan metode LRS dengan $n = 6$ untuk menghampiri nilai $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ lalu tentukan batas galatnya.
2. Tentukan n agar galat hampiran LRS terhadap $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ tidak melebihi 0,0001



Misalkan f terdefinisi di $[a, b]$.

Bentuk partisi (sama lebar):

$\mathcal{P} : 1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

sebut $h = \Delta x = \frac{b-a}{n}$

- Metode Persegi Panjang Kanan (RRS)

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\, dx$$

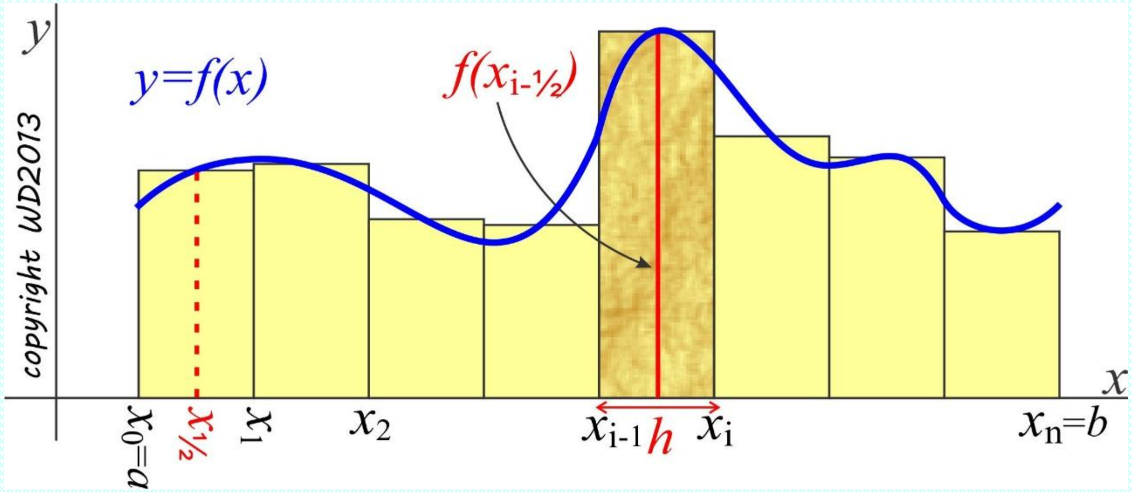
$$\approx h\, f(x_1) + h\, f(x_2) + \cdots + h\, f(x_n)$$

- Galat metode RRS: $E_n = -\frac{(b-a)^2}{2n} f'(c)$, $a \le c \le b$.

Contoh:

1. Tentukan n agar galat hampiran RRS terhadap $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$ tidak melebihi 0,0001, lalu tentukan nilai hampirannya.

Metode Persegi Panjang Tengah / Center Riemann Sum (CRS)



Misalkan f terdefinisi di $[a, b]$.
Bentuk partisi (sama lebar):

$\mathcal{P} : 1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

sebut $h = \Delta x = \frac{b-a}{n}$

- Metode Persegi Panjang Tengah (CRS)

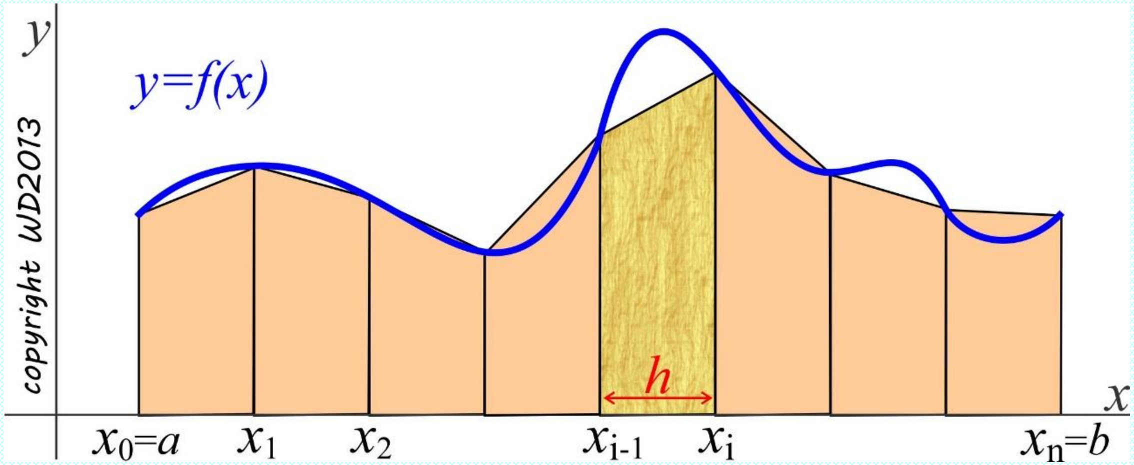
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

$$\approx h\,f(x_{\frac{1}{2}}) + h\,f(x_{\frac{3}{2}}) + \cdots + h\,f(x_{n-\frac{1}{2}})$$

- Galat metode RRS: $E_n = -\frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(c),\ a \le c \le b.$

Contoh:

1. Tentukan n agar galat hampiran CRS terhadap $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ tidak melebihi 0,0001, lalu tentukan nilai hampirannya.



Misalkan f terdefinisi di $[a, b]$.

Bentuk partisi (sama lebar):

$\mathcal{P} : 1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

sebut $h = \Delta x = \frac{b-a}{n}$

- Pada setiap interval $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \cdots, n$ kita bentuk trapesium.
- "Luas" trapesium ke i, $\Delta L_i = \frac{h}{2} \cdot (f(x_{i-1}) + f(x_i))$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

$$\approx \frac{h}{2}\big(f(x_0) + f(x_1)\big) + \frac{h}{2}\big(f(x_1) + f(x_2)\big) + \cdots + \frac{h}{2}\big(f(x_{n-1}) + f(x_n)\big)$$

$$= \frac{h}{2}\big(f(x_0) + 2\,f(x_1) + 2\,f(x_2) + \cdots + 2\,f(x_{n-1}) + f(x_n)\big)$$

Hampiran terakhir disebut hampiran / metode Trapesium.

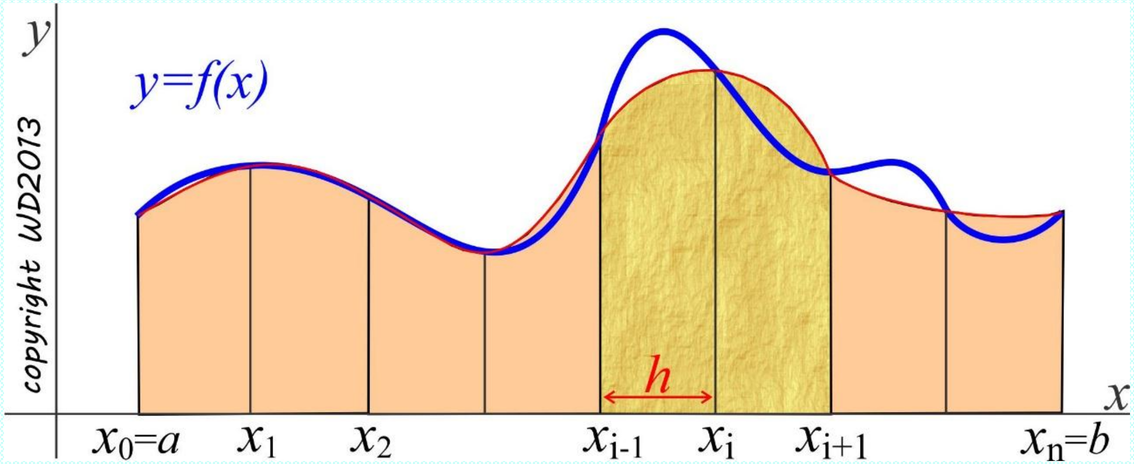
- Galat metode Trapesium:

$$E_n = \frac{(b-a)^3}{12\, n^2}\, f''(c)$$ dengan c diantara a dan b

Contoh:

1. Terapkan metode Trapesium dengan $n = 6$ untuk menghampiri nilai $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$ lalu tentukan batas galatnya. Δ

Metode Simpson / Parabol



Misalkan f terdefinisi di $[a, b]$.
Bentuk partisi (sama lebar):

$\mathcal{P} : 1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

n genap.

sebut $h = \Delta x = \frac{b-a}{n}$

- Pada setiap 2 interval $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, \cdots, n$ kita bentuk parabola.
- "Luas" daerah di bawah parabola ke i, $\Delta L_i = \frac{h}{3} \cdot (f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1}))$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx$$

$$\approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\,f(x_1) + 2\,f(x_2) + 4\,f(x_3) + 2\,f(x_4) + \cdots + 4\,f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

Hampiran terakhir disebut hampiran / metode Simpson.

- Galat metode Simpson:

$$E_n = \frac{(b-a)^5}{180\, n^4} f^{(4)}(c)$$ dengan c diantara a dan b

Contoh:

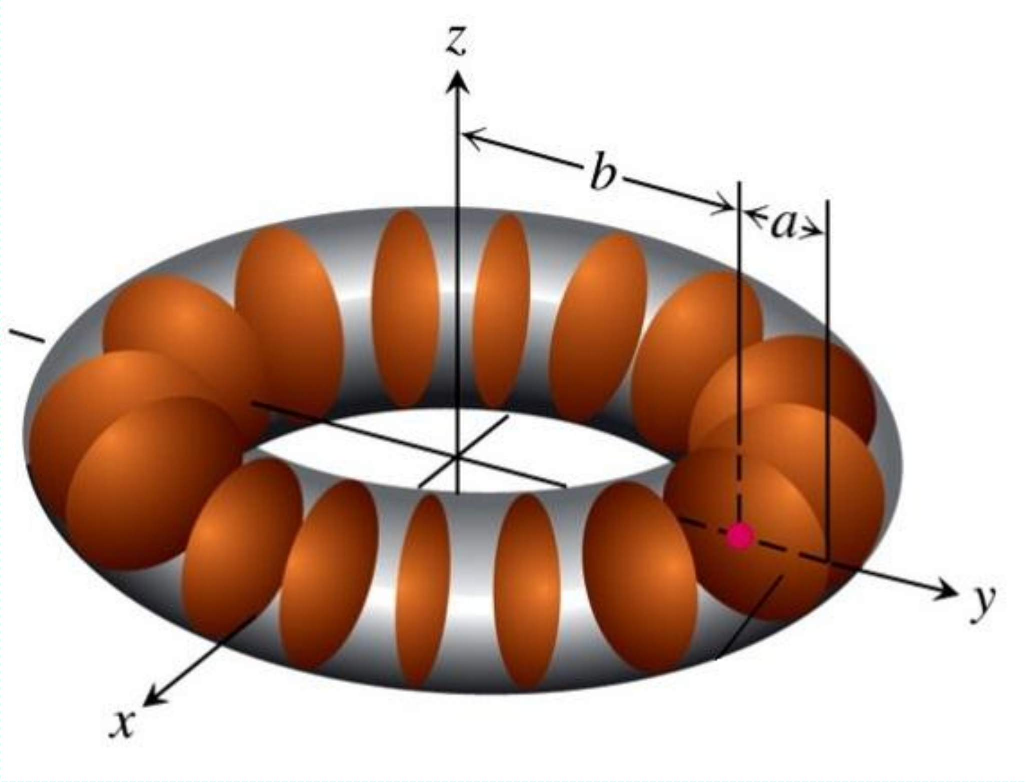
1. Terapkan metode Simpson untuk mengaproksimasi $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$ dengan galat tidak melebihi 0,0001. Δ

The End Of

CHAPTER 4

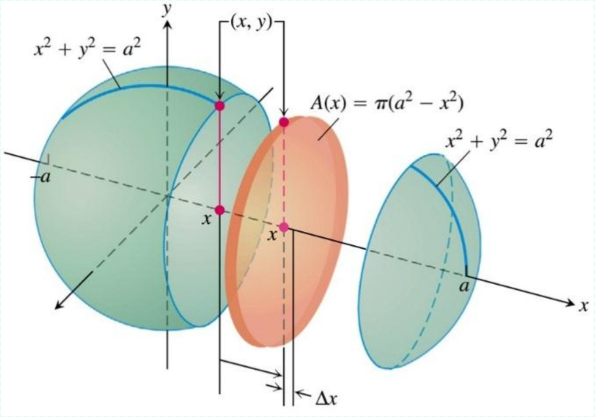
BAB 5

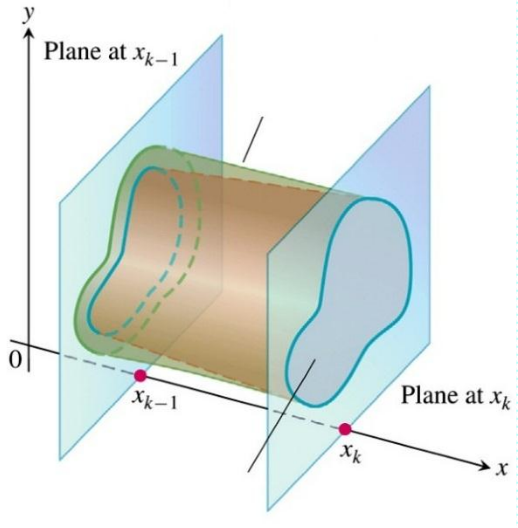
Penggunaan Integral

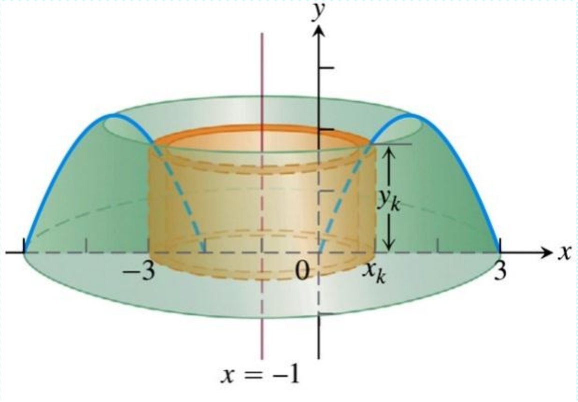


Pokok Bahasan

- Perhitungan Luas daerah di bidang
- Perhitungan Volume Benda dengan metode Irisan penampang
- Perhitungan Volume Benda putar dengan metode cakram / cincin
- Perhitungan Volume Benda putar dengan metode kulit tabung
- Kerja
- Momen dan Pusat Massa



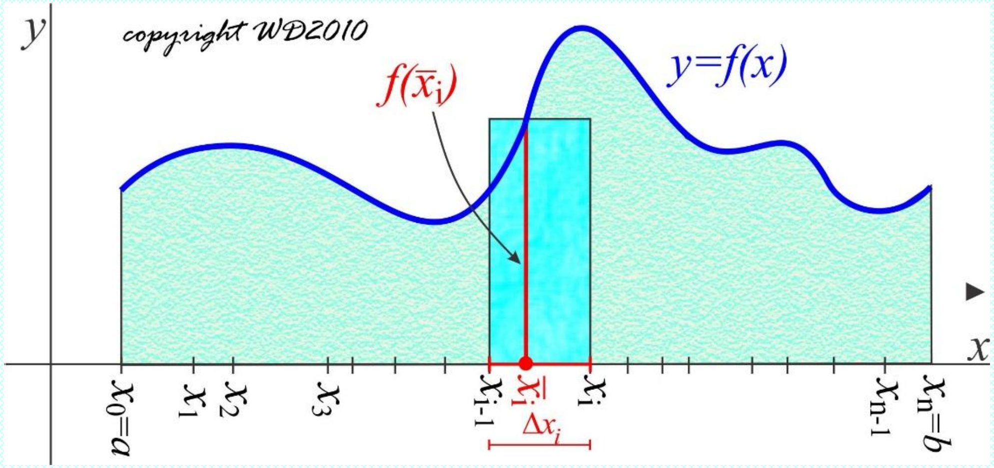




Luas Daerah di Bidang

Diberikan daerah yang dibatasi oleh fungsi positif $f(x)$, garis $x = a$, garis $x = b$, dan sumbu x.

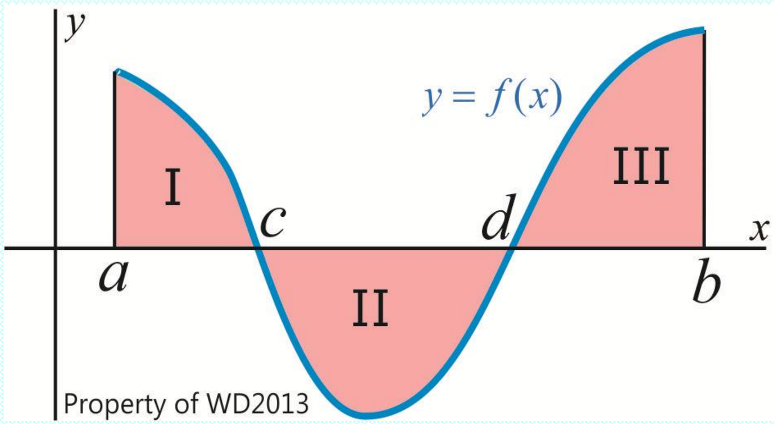
Akan dihitung luas keping tersebut.



- Bentuk partisi
  $\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
- Perhatikan segmen ke i, yaitu $[x_{i-1}, x_i]$. Lebarnya $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$
- Pilih titik wakil $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$
- Bentuk persegi panjang dengan panjang $f(\bar{x}_i)$ dan lebar Δx_i
  Persegi panjang ini disebut elemen luas.
- Luas persegi panjang tersebut, $\Delta L_i = f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$
- Luas keeping seluruhnya, $L = \lim\limits_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$

  Perhatikan: a. Tanda $\lim\limits_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n}$ berubah menjadi $\int_a^b$
  b. $\bar{x}_i$ berubah menjadi x
  c. Δx_i berubah menjadi dx

Contoh: Hitung luas daerah yang dibatasi oleh grafik $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2 + 2$, garis $x = 0$, garis $x = 2$ dan sumbu x. Δ



Fungsi f memuat bagian yang negatif,

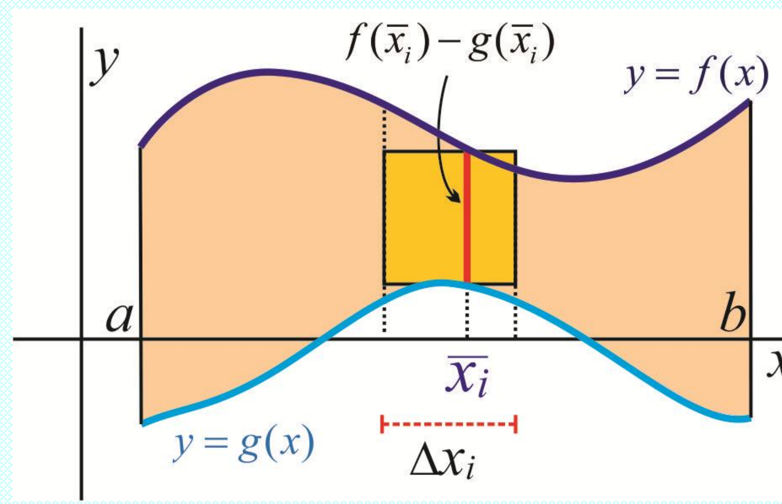
$$L = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

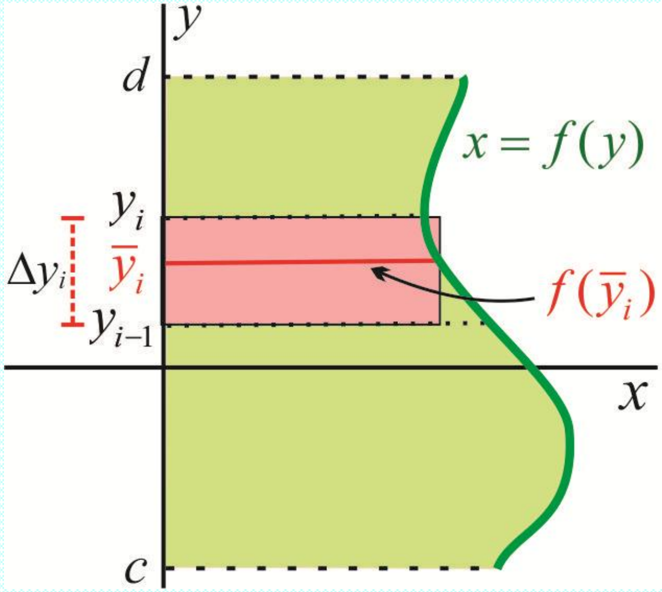
$$L = \int_a^c f(x)\, dx + \int_a^c (-f(x))\, dx + \int_a^c f(x)\, dx$$

Luas daerah diantara dua grafik fungsi.

$$\Delta L_i = [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)]\, \Delta x_i$$

$$L = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$





Keping dengan batas $x = f(y)$

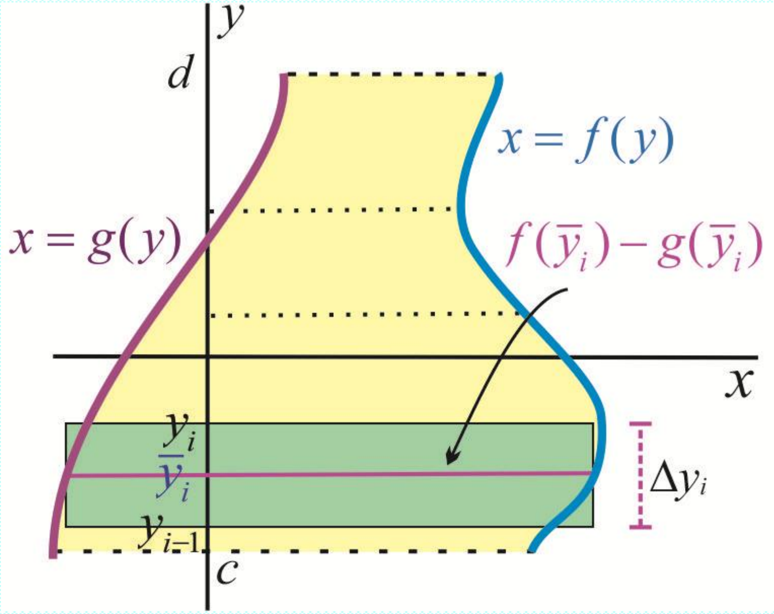
$$\Delta L_i = f(\bar{y}_i)\,\Delta y_i$$

$$L = \int_c^d f(y)\ dy$$

Keping di antara dua fungsi y

$$\Delta L_i = [f(\bar{y}_i) - g(\bar{y}_i)]\,\Delta y_i$$

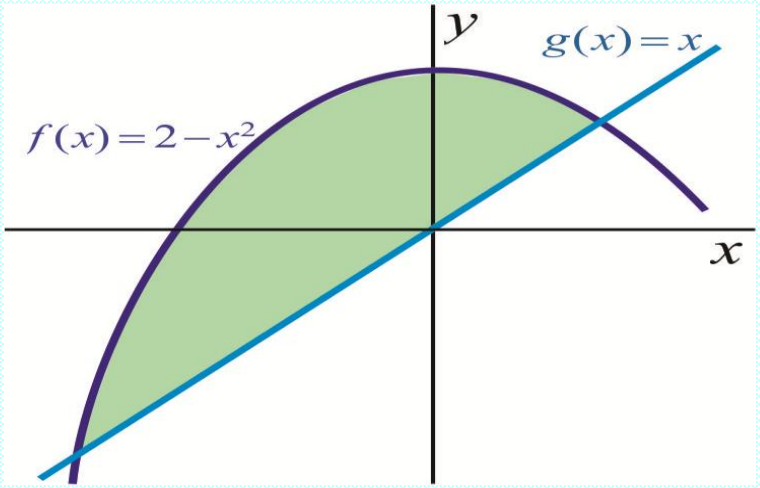
$$L = \int_c^d [f(y) - g(y)]\ dy$$



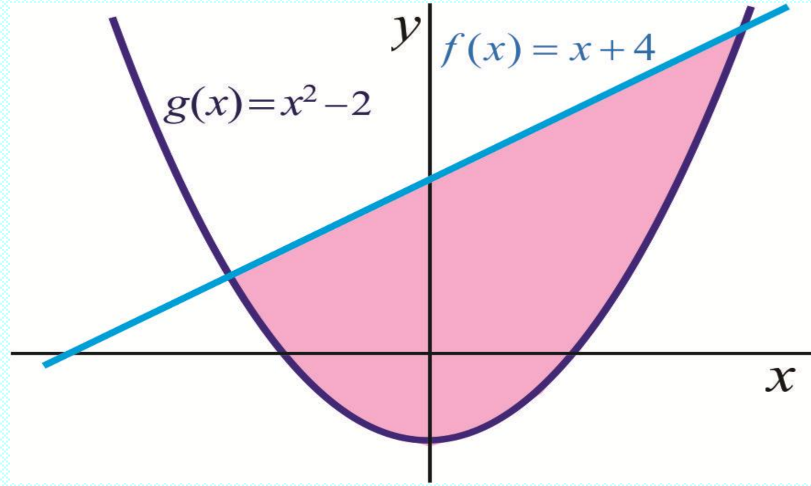
Latihan

Pada gambar-gambar di bawah ini:

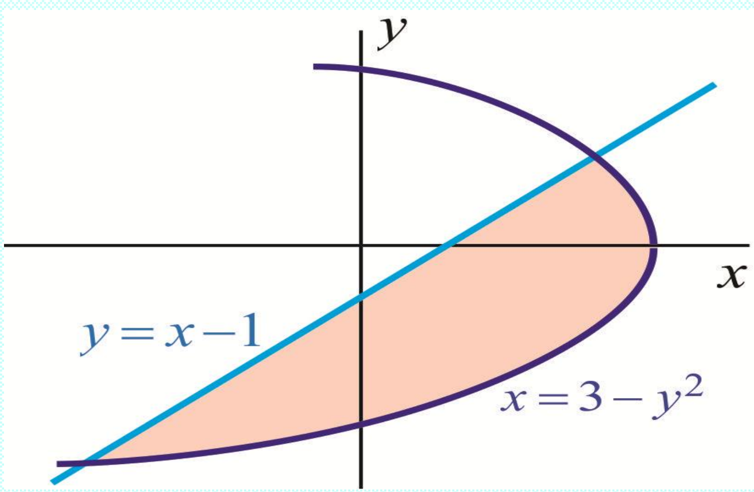
- Gambarkan elemen luas pada partisi ke i, lalu tentukan ΔL_i
- Tuliskan integral yang menyatakan luas daerah tersebut.



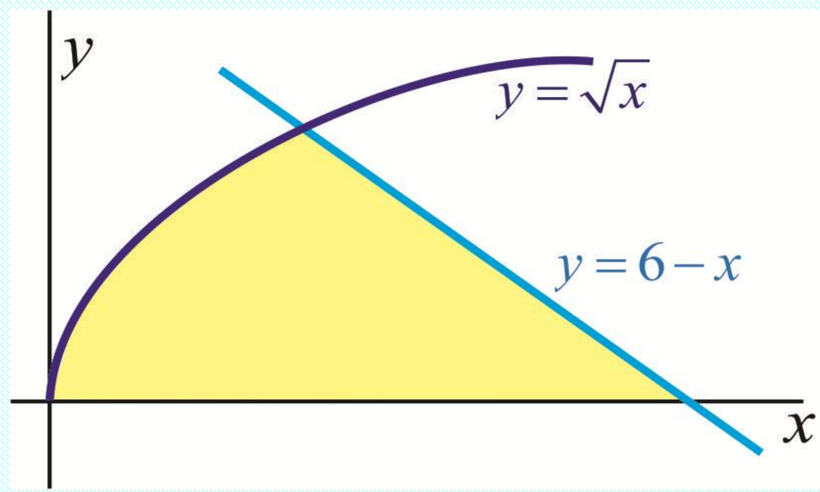
Δ



Δ



Δ



Δ

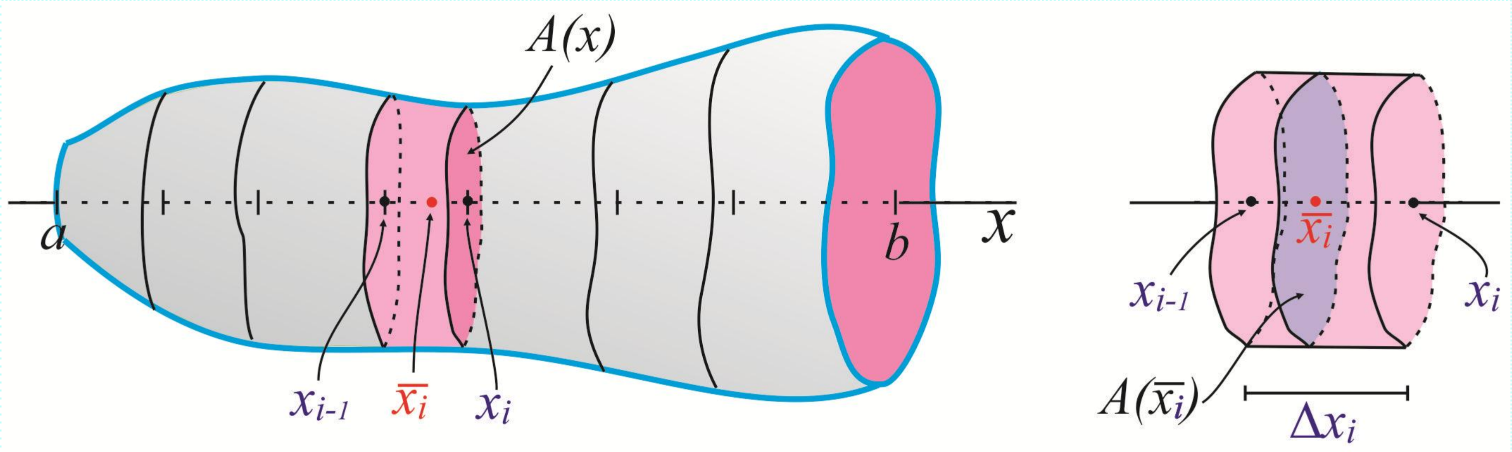
Latihan

1. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh grafik-grafik:
   a. $y = x + 6$, $y = x^3$, dan $2y + x = 0$. ψ
   b. $y = \sqrt{x}$, sumbu y, dan garis $y = 1$. ψ

2. Sebuah benda bergerak sepanjang garis lurus dengan kecepatan $v(t) = 3t^2 - 24t + 36$. Tentukan **perpindahan** dan **jarak tempuh** benda selama interval waktu $-1 \leq t \leq 9$. ψ

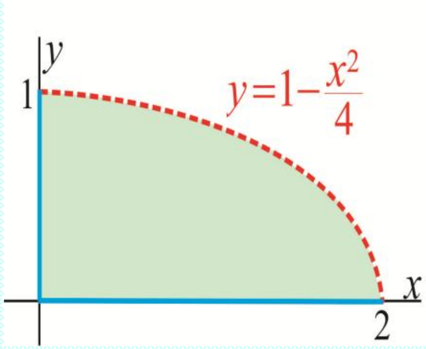
3. Sebuah keeping dibatasi oleh grafik-grafik $y = \frac{1}{x^2}$, garis $x = 1$, garis $x = 6$, dan sumbu x.
   a. Hitung luas keeping tersebut
   b. Tentukan bilangan real c, sehingga garis $x = c$ membagi keping tersebut atas dua bagian dengan luas sama.
   c. Tentukan bilangan real d, sehingga garis $y = d$ membagi keping tersebut atas dua bagian dengan luas sama. ψ

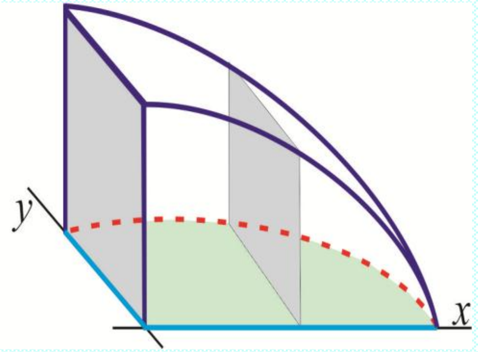
Volume Benda, Metode Irisan Penampang Ω



- Perhatikan sebuah benda pejal dengan poros pada sumbu x, $a \le x \le b$.
- Luas irisan penampang benda di setiap titik x diketahui yaitu $A(x)$.
- Bentuk partisi $\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, dengan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$
- Pada setiap subinterval, pilih wakil $\bar{x}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$
- Buat "silinder" dengan luas penampang $A(\bar{x}_i)$ dan tinggi Δx_i
- Volume dari elemen ke i, $\Delta V_i = A(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$
- Volume seluruh benda, $V = \int_a^b A(x)\,dx$

1. Alas sebuah benda adalah daerah yang dibatasi oleh grafik $y = 1 - \frac{x^2}{4}$, sumbu x, dan sumbu y. Tentukan volume benda tersebut. Δ

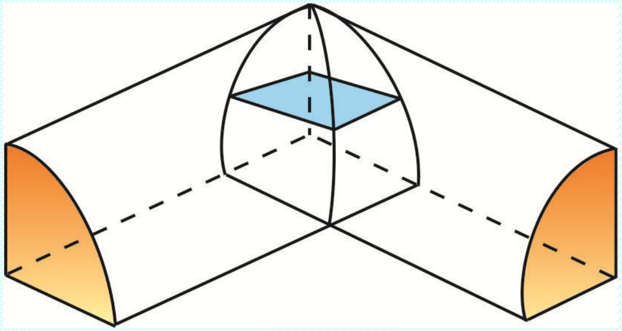


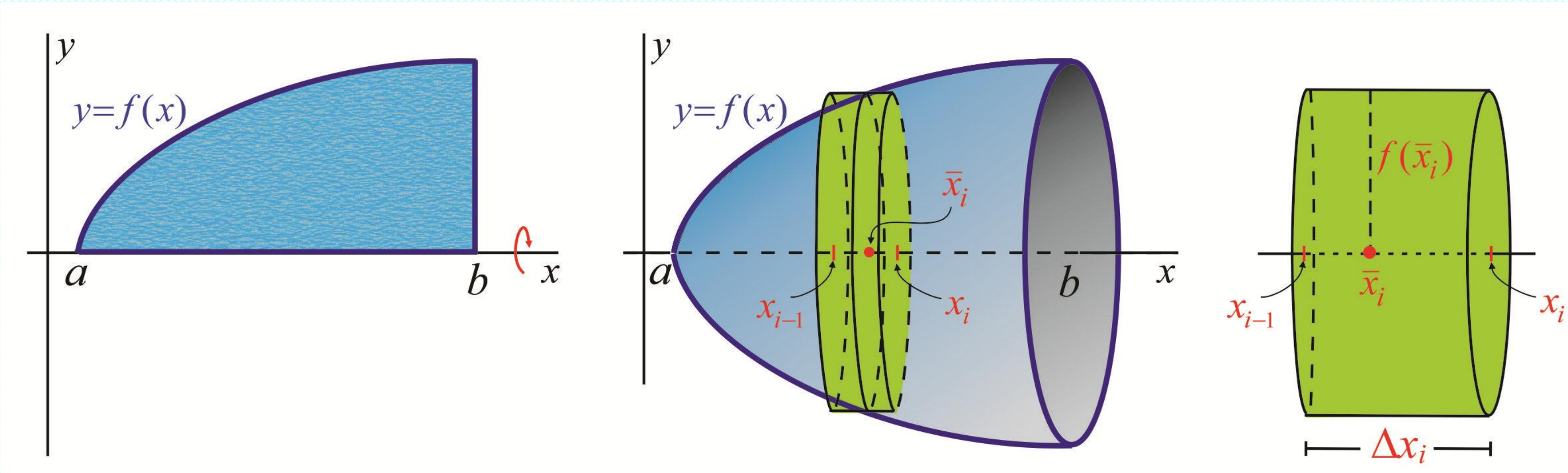


2. Alas sebuah benda adalah daerah yang dibatasi oleh sumbu x dan grafik $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$. Penampang yang tegak lurus sumbu x berbentuk segitiga sama sisi. Tentukan volume benda tersebut. ψ

3. Alas sebuah benda adalah daerah yang dibatasi oleh grafik-grafik $y = \sqrt{x}$ dan $y = x$^2. Penampang yang tegak lurus sumbu x berbentuk setengah lingkaran. Tentukan volume benda tersebut. ψ

4. Tentukan volume irisan dua buah seperempat silinder berjari-jari satu seperti pada gambar di samping. *Petunjuk: penampang mendatar dari benda tersebut berbentuk persegi.* ψ





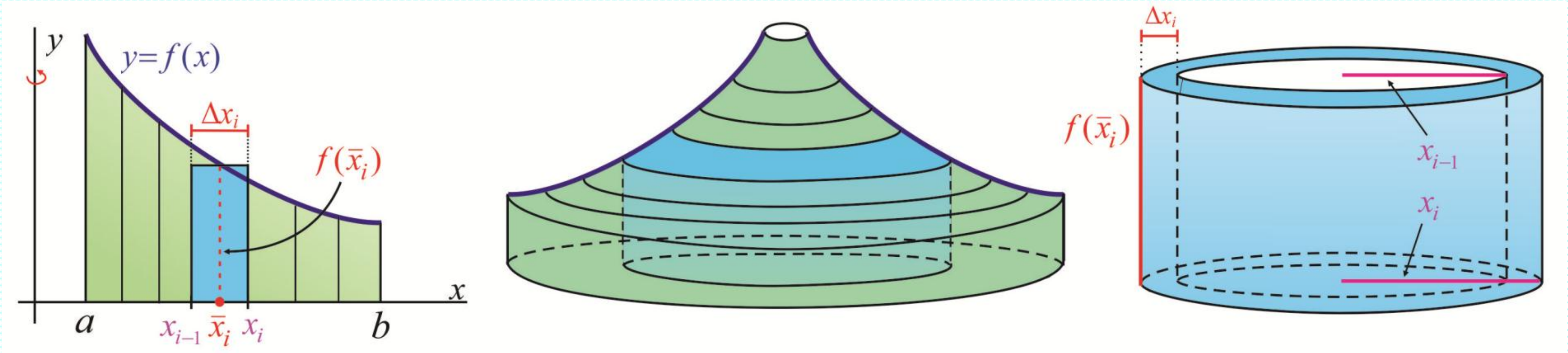
- Sebuah keping dibatasi oleh grafik $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, dan sumbu x.
- Keping tersebut diputar terhadap sumbu x.
- Bentuk partisi sepanjang $[a, b]$, dan perhatikan partisi ke i.
- Bentuk silinder dengan jari-jari $f(\bar{x}_i)$ dan tinggi Δx_i.
- Volume elemen ke i, $\Delta V_i = \pi f^2(\bar{x}_i)\, \Delta x_i$
- Volume seluruh benda, $V = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx$

Latihan Metode Cakram & Metode Cincin

Tentukan volume benda putar berikut:

1. Daerah yang dibatasi oleh grafik $y = \sqrt{x}$, garis $x = 4$, dan sumbu x diputar terhadap sumbu x. Δ
2. Daerah yang dibatasi oleh grafik $y = \sqrt{x}$, garis $x = 4$, dan sumbu x diputar terhadap sumbu y. Metodenya disebut metode Cincin. Δ
3. Daerah di antara grafik $y = x^2$ dan $y = \sqrt{8x}$ diputar terhadap sumbu x.
4. Daerah di antara grafik $y = x^2$ dan $y = \sqrt{8x}$ diputar terhadap sumbu y.
5. Daerah yang dibatasi oleh grafik $y = \sqrt{x}$, garis $x = 4$, sumbu x, dan sumbu y, diputar terhadap garis $x = -1$.
6. Daerah yang dibatasi oleh grafik $y = \sqrt{x}$, garis $x = 4$, sumbu x, dan sumbu y, diputar terhadap garis $y = 5$.
7. Daerah di antara grafik $y = x^2$ dan $y = \sqrt{8x}$ diputar terhadap garis $y = -2$.
8. Daerah di antara grafik $y = x^2$ dan $y = \sqrt{8x}$ diputar terhadap garis $x = 3$. ψ

Volume Benda Putar : Metode Kulit Tabung Ω Ω



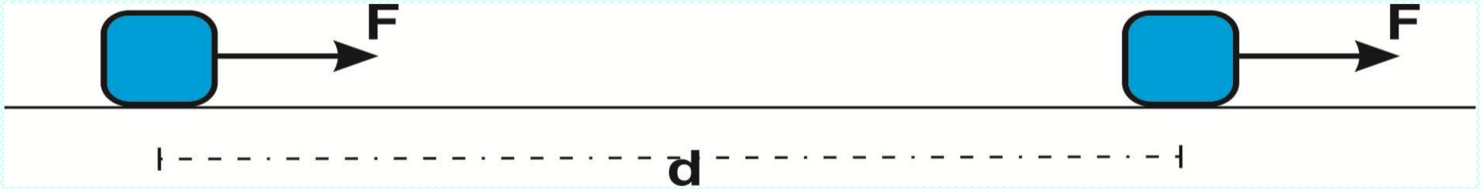
- Sebuah keping dibatasi oleh grafik $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, dan sumbu x.
- Keping tersebut diputar terhadap sumbu y.
- Bentuk partisi sepanjang $[a, b]$, dan perhatikan partisi ke i.
- Pilih titik wakil $\bar{x}_i$ titik tengah antara x_{i-1} dengan x_i, $\bar{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$
- Bentuk **kulit tabung** seperti pada gambar di atas.
- Volume kulit tabung tersebut, $\Delta V_i = 2\,\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$ (buktikan !!!)
- Volume seluruh benda, $V = \int_a^b 2\pi\, x\, f(x)\, dx$

Latihan Metode Kulit Tabung

Tentukan volume benda putar berikut:

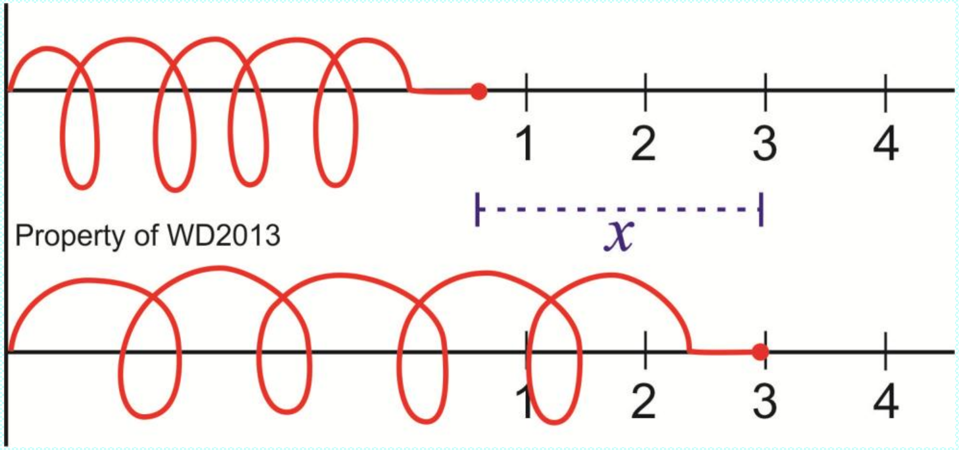
1. Daerah yang dibatasi oleh grafik $y = \sqrt{x}$, garis $x = 4$, dan sumbu x diputar terhadap sumbu x. ψ
2. Daerah yang dibatasi oleh grafik $y = \sqrt{x}$, garis $x = 4$, dan sumbu x diputar terhadap sumbu y. ψ
3. Daerah di antara grafik $y = x^2$ dan $y = \sqrt{8x}$ diputar terhadap sumbu x.
4. Daerah di antara grafik $y = x^2$ dan $y = \sqrt{8x}$ diputar terhadap sumbu y.
5. Daerah yang dibatasi oleh grafik $y = \sqrt{x}$, garis $x = 4$, sumbu x, dan sumbu y, diputar terhadap garis $x = -1$.
6. Daerah yang dibatasi oleh grafik $y = \sqrt{x}$, garis $x = 4$, sumbu x, dan sumbu y, diputar terhadap garis $y = 5$.
7. Daerah di antara grafik $y = x^2$ dan $y = \sqrt{8x}$ diputar terhadap garis $y = -2$.
8. Daerah di antara grafik $y = x^2$ dan $y = \sqrt{8x}$ diputar terhadap garis $x = 3$. ψ

- Kerja = Gaya x Perpindahan, dinotasikan $\boldsymbol{W = F \cdot d}$



Rumus di atas berlaku bila gaya dan perpindahan konstan.

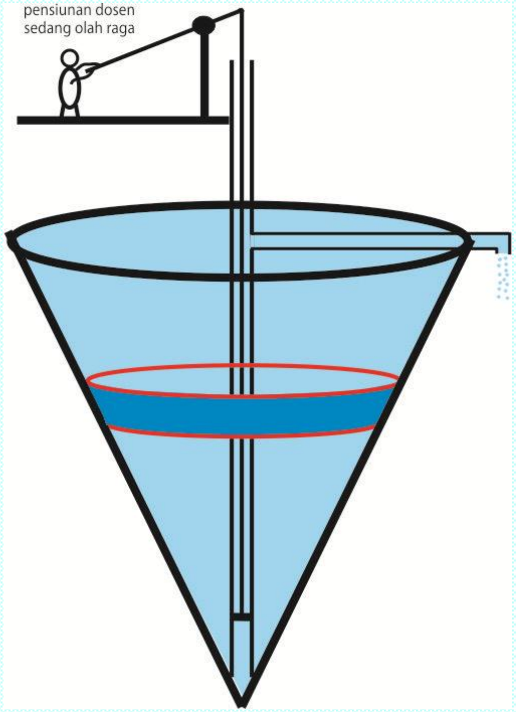
- Bagaimana menghitung kerja bila gaya atau perpindahan tidak konstan.
- Ilustrasi: Masalah menarik pegas. Pada kasus ini gayanya tidak konstan.



Hukum Hooke

Gaya yang diperlukan untuk menarik pegas sejauh x dari posisi setimbang adalah $F = k \cdot x$

Bagaimana menentukan kerjanya.



Sebuah bak berbentuk kerucut terbalik, penuh berisi air. Seluruh air dalam bak akan dipindahkan sampai ke permukaan atas bak.

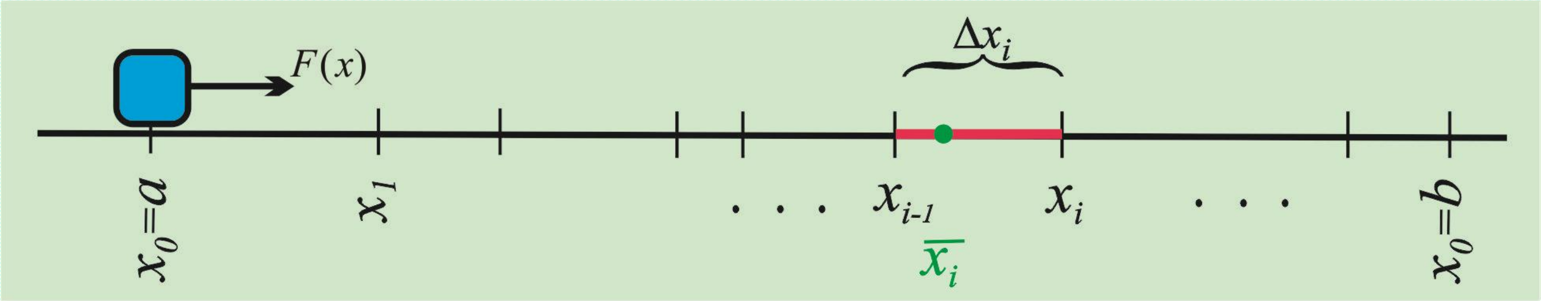
Bagaimana menghitung kerja yang dilakukan?

Pada masalah ini kita pandang proses perpindahan dilakukan pada elemen air selapis demi selapis. Dengan demikian perpindahan yang terjadi berbeda-beda.

.

Catatan: proses perhitungan seperti di atas, secara hukum fisika tidak mengubah total kerja yang harus dilakukan.

Hal lain, gaya yang diperlukan untuk memindahkan elemen air tersebut juga berbeda-beda. Hal ini disebabkan volume elemen air yang harus dipindahkan pada tiap lapis berbeda-beda.



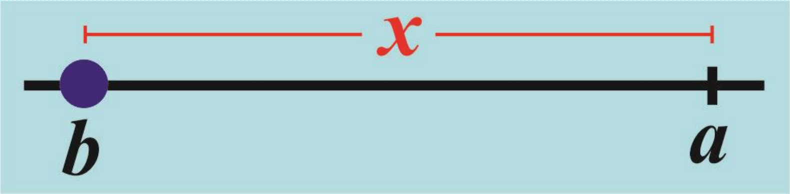
- Sebuah benda ditarik mendatar dari posisi a sampai b dengan gaya $F(x)$. Bagaimana menghitung kerja yang dilakukan?
- Partisikan interval $[a, b]$ atas n bagian.
- Perhatikan partisi ke i.
- Pilih wakil $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$
- Gaya yang bekerja sepanjang $[x_{i-1}, x_i]$ diaproksimasi sebesar $F(\bar{x}_i)$
- Kerja sepanjang x_{i-1} sampai x_i adalah $\Delta W_i = F(\bar{x}_i) \cdot \Delta x_i$
- Kerja seluruhnya dari a sampai b, $W = \int_a^b F(x)\ dx$

Latihan

1. Sebuah pegas panjang alaminya 6 cm. Untuk menarik dan menahannya sejauh 4 cm diperlukan gaya sebesar 8 dyne. Tentukan kerja yang dilakukan untuk menariknya sejauh 7 cm dari panjang alaminya.
   Gunakan hukum Hooke: untuk menahan pegas sejauh x *cm diperlukan gaya sebesar* $F = kx$*, dengan* k *adalah konstanta pegas*. Δ

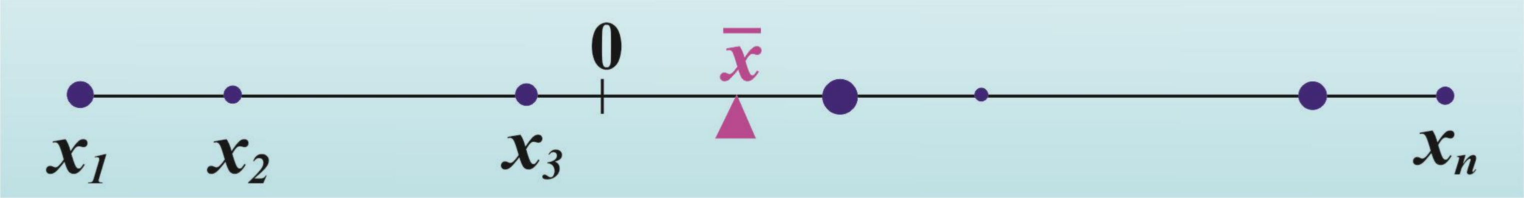
2. Tangki berbentuk kerucut terbalik penuh berisi air. Tinggi tangki 4 meter dan jari-jari permukaan atasnya 1 meter. Bila besarnya gaya gravitasi adalah g, tentukan kerja yang dilakukan untuk memompa seluruh air sampai permukaan atas tangki. Δ

3. Sebuah rantai yang beratnya 1 kg/meter, dipakai mengangkat benda seberat 200 kg dari dasar sumur yang dalamnya 15 meter. Tentukan kerja yang dilakukan untuk mengangkat benda tersebut sampai permukaan sumur.
   Petunjuk: gaya yang diperlukan untuk mengangkat benda adalah berat benda + berat rantai yang terjulur. ψ



- Momen = Massa x "Jarak berarah", dinotasikan $\boldsymbol{M = m \cdot x}$

- Pada gambar di atas, momen benda terhadap titik a, $M_a = m \cdot (b - a)$ Nilai M_a pada kasus ini negatif karena $(b - a) < 0$.



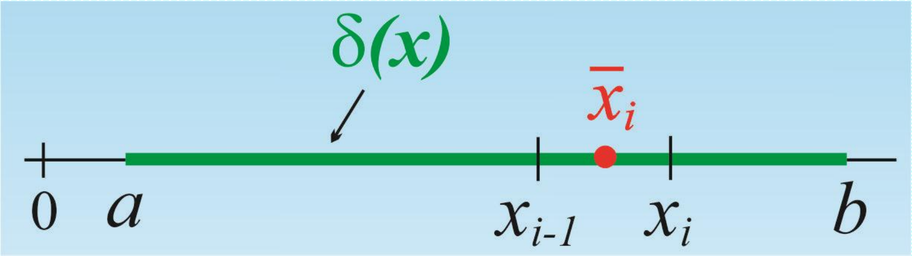
- Perhatikan n buah benda dengan massa dan posisi $m_i, x_i,\ i = 1,2,\cdots,n$.
- Misalkan **titik berat / titik pusat massa** benda berada pada posisi $\bar{x}$.
- Menurut hukum fisika, momen total terhadap titik $\bar{x}$ haruslah bernilai nol.
- $(x_1 - \bar{x})\ m_1 + \ (x_2 - \bar{x})\ m_2 + \cdots + (x_n - \ \bar{x})\ m_n = 0$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$\sum_{i=1}^{n} m_i$ merupakan massa total benda.

$\sum_{i=1}^{n} x_i m_i$ merupakan momen total terhadap titik nol

Latihan: Massa sebesar 4, 2, 6, dan 7 gram diletakkan di sumbu x pada posisi 0, 1, 2, dan 4. Tentukan pusat massanya.

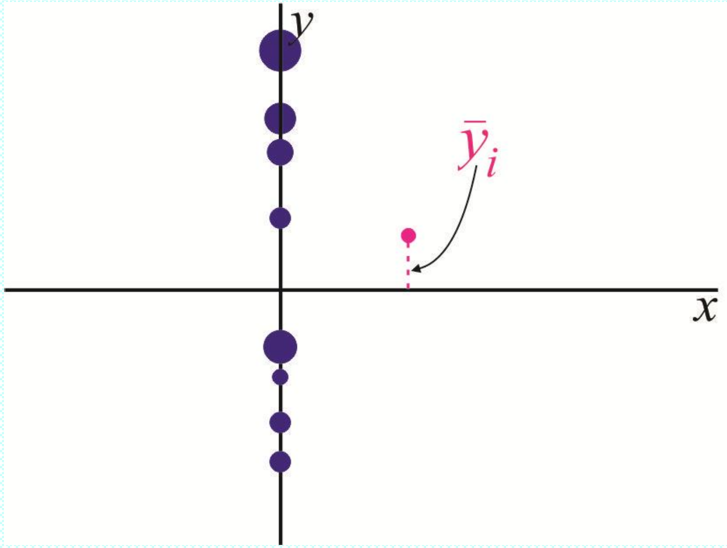


Perhatikan kawat satu dimensi dengan rapat massa $\delta(x)$ yang terletak sepanjang $x = a$ sampai $x = b$.

- Partisikan interval $[a, b]$ atas n bagian dan perhatikan segmen ke i.
- Pilih titik wakil $\bar{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$, yaitu tengah-tengah antara x_{i-1} dan x_i.
- Segmen $[x_{i-1}, x_i]$ kita pandang sebagai satu titik massa dengan rapat massa $\delta(\bar{x}_i)$ dan posisi di titik $\bar{x}_i$.
- Massa dan "momen benda terhadap titik nol",

  $\Delta m_i = \delta(\bar{x}_i) \cdot \Delta x_i$ dan $\Delta M_i = \bar{x}_i \cdot \delta(\bar{x}_i) \cdot \Delta x_i$
- $m = \int_a^b \delta(x)\, dx$, $M = \int_a^b x\, \delta(x)\, dx$, dan pusat massanya $\bar{x} = \frac{M}{m}$

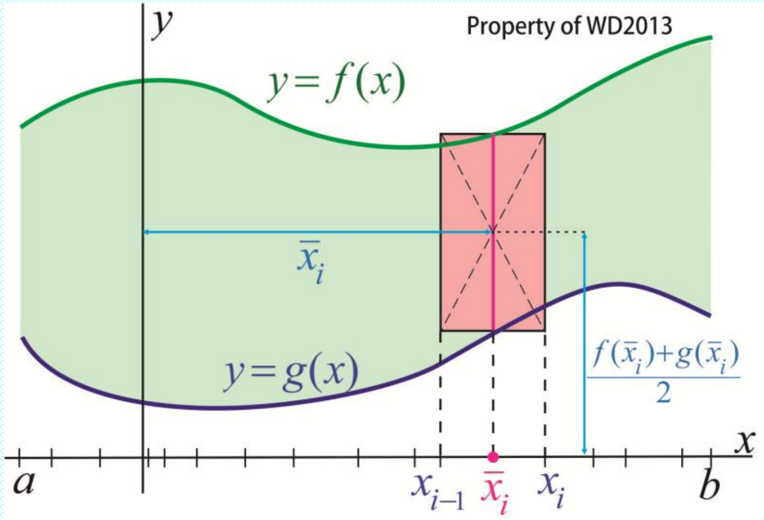
Latihan: Rapat massa sepotong kawat $3x^2$ gram/cm. Tentukan pusat massa kawat tersebut sepanjang interval $[2,10]$. Δ



- Perhatikan n buah benda di bidang dengan massa m_i dan posisi (x_i, y_i), $i = 1, 2, \cdots, n$.
- Misalkan titik pusat massanya $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$.
- Bagaimana menentukan titik pusat massa tersebut ?
- Untuk menentukan $\bar{x}_i$, kita proyeksikan semua benda pada sumbu x.
- Massa benda $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$.
- Momen total terhadap sumbu y, $M_y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i$
- Dari sini diperoleh $\bar{x}_i = \frac{M_y}{m}$
- Dengan cara sama, untuk mendapatkan $\bar{y}_i$, kita proyeksikan semua benda pada sumbu y.
- Momen total terhadap sumbu x, $M_x = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i$
- Dengan demikian $\bar{y}_i = \frac{M_x}{m}$

Latihan: Lima buah benda dengan massa 1, 4,2, 3, dan 6 gram terletak pada koordinat $(6, -1)$, $(2,3)$, $(-4,2)$, $(-7,8)$, $(2, -2)$. Tentukan titik pusat massanya.

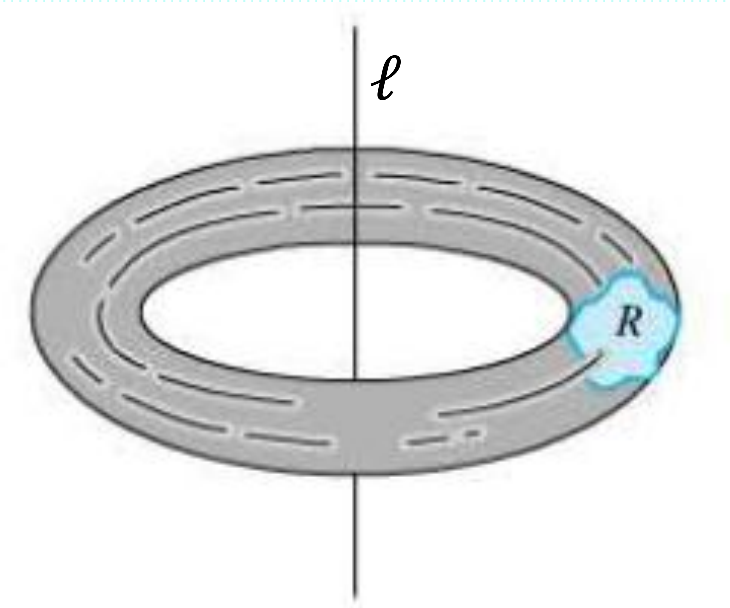
Pusat Massa Keping Homogen



- Sebuah keping homogen dengan rapat massa δ, dibatasi oleh grafik-grafik seperti pada gambar di samping.
- Akan dihitung pusat massa keping.
- Partisikan interval $[a, b]$ atas n bagian, dan perhatikan segmen ke i.
- Pilih titik wakil $\bar{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$
- Bentuk persegi panjang dengan tinggi $f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)$ dan lebar Δx_i
- Pusat massa persegi panjang tersebut berada di perpotongan diagonalnya.
- $\Delta m = \delta \left(f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)\right) \Delta x_i$ $\qquad m = \delta \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$
- $\Delta M_y = \delta\, \bar{x}_i (f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i))\, \Delta x_i$ $\qquad M_y = \delta \int_a^b x\, (f(x) - g(x))\, dx$
- $\Delta M_x = \delta\, \frac{f^2(\bar{x}_i) - g^2(\bar{x}_i)}{2}\, \Delta x_i$ $\qquad M_x = \delta \int_a^b \frac{f^2(x) - g^2(x)}{2}\, dx$
- Pusat massa / **centroid**: $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ dengan $\bar{x}_i = \frac{M_y}{m}$ dan $\bar{y}_i = \frac{M_x}{m}$

Latihan

1. Tentukan sentroid keping yang dibatasi oleh $y = x^3$ dan $y = \sqrt{x}$.
2. Tentukan rumus sentorid untuk keping homogen yang dibatasi oleh grafik $x = f(y)$, $x = g(y)$, garis $y = c$ dan garis $y = d$. Asumsikan $g(y) < f(y)$ untuk semua $x \in [c, d]$.
3. Hitung pusat massa pada soal (1) dengan membuat partisi pada sumbu y.



- Keping R dan garis ℓ terletak sebidang
- Keping tersebut diputar terhadap garis ℓ
- Misalkan luas keeping tersebut A.
- Misalkan jarak pusat massa keeping terhadap garis ℓ adalah s.
- Volume benda yang terbentuk adalah

$$V = 2\pi s A$$ (buktikan)

Latihan: Daerah yang dibatasi oleh grafik $y = \sin x$ dan sumbu x sepanjang $0 \leq x \leq \pi$ diputar terhadap sumbu x. Tentukan volume benda yang terbentuk memakai metode cakram dan metode Pappus. (Purcell 9th ed. page 313)

The End Of

CHAPTER 5

Fungsi-Fungsi Transenden

Fungsi real secara umum dibagi atas dua kelas yaitu:

- fungsi aljabar (polinom, fungsi rasional, akar, harga mutlak).
- fungsi transenden, yaitu yang bukan fungsi aljabar.

Fungsi transenden yang sudah pernah dibahas adalah fungsi trigonometri. Pada bagian ini akan dipelajari berbagai macam fungsi transenden lainnya.

Fungsi Logaritma Asli

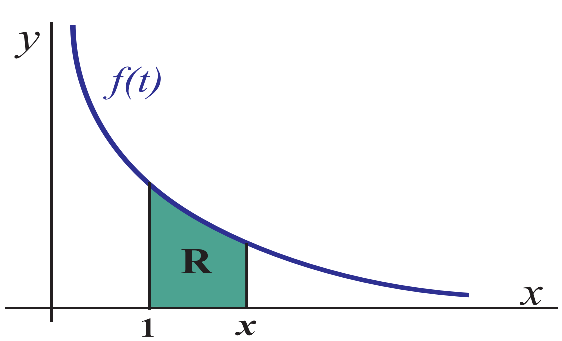
Perhatikan fungsi $f(x) = \int_1^x \frac{1}{t^k}\, dt,\ \ x > 0.$

Untuk $k \in \mathbb{Q},\ \ k \neq 1,\ \ f(x) = -\frac{1}{k-1}\left(\frac{1}{x^{k-1}} - 1\right).$

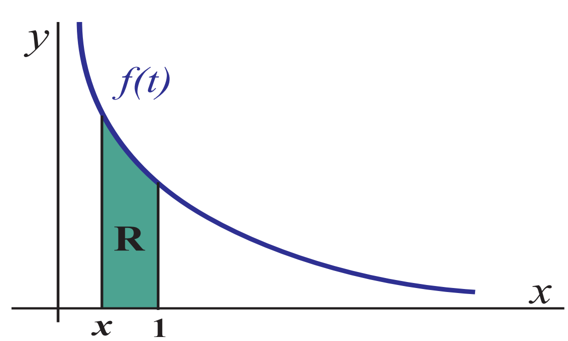
Untuk $k = 1$, fungsi di atas menjadi $f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$ Anti turunan dari fungsi ini tidak dapat ditentukan seperti pada kasus $k \neq 1$.

Definisi: Fungsi $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt\ ,\ \ x > 0$ dinamakan fungsi logaritma asli, dinotasikan $\ln x$, dibaca *Lon x*.

Secara geometri, fungsi $\ln x$ dapat diilustrasikan sebagai berikut:
Perhatikan daerah yang dibatasi $f(t) = \frac{1}{t}$, sumbu-x, $t = 1$, dan $t = x$



untuk $x > 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt =$ Luas R



untuk $x < 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt =$ - Luas R

Sifat: $D_x[\ln x] = \dfrac{1}{x}$ (bukti: terapkan teorema dasar kalkulus 2 terhadap $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$)

Latihan:

1. Tentukan $D_x[\ln \sqrt{x}\,]$ ♠
2. Tunjukkan $D_x[\ln |x|] = \frac{1}{x}$ ♠, jadi diperoleh $\displaystyle\int \frac{1}{u}\,du = \ln |u| + c$
3. Tentukan $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{x}{10 - x^2}\,dx$ ♠

Sifat-sifat: Misalkan a dan b bilangan-bilangan positif dan $r \in \mathbb{Q}$

- $\ln 1 = 0$
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^r) = r\ \ln a$

Grafik Fungsi Logaritma Asli

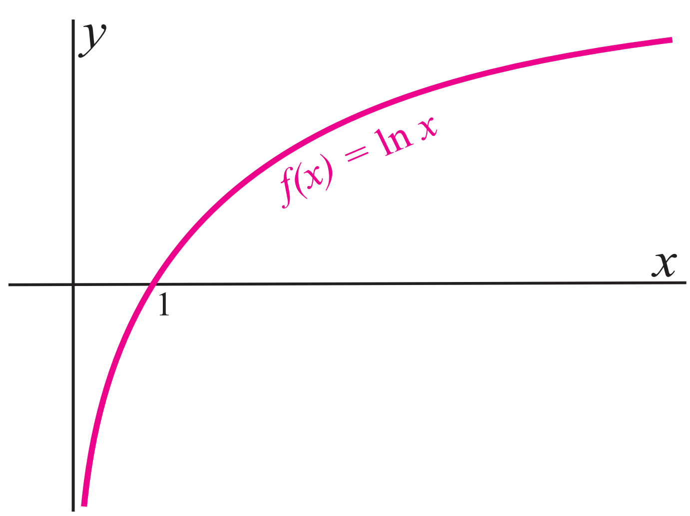
Misalkan $f(x) = \ln x,\ x > 0$. Grafik memotong sumbu-x pada $x = 1$

$f'(x) = \frac{1}{x} > 0$, jadi grafik selalu monoton naik.

$f''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$, jadi grafik selalu cekung ke bawah.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \end{array}\right\}$$

lihat Purcell edisi 9, halaman 331, soal 43 dan 44.



Penurunan Fungsi dengan Bantuan Fungsi Logaritma Asli:
Fungsi logaritma asli dapat digunakan untuk menyederhanakan proses perhitungan turunan fungsi yang memuat pemangkatan, perkalian dan pembagian seperti diilustrasikan berikut ini,

Tentukan turunan dari fungsi $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x+1)^{2/3}}$ ♠

Soal-Soal:

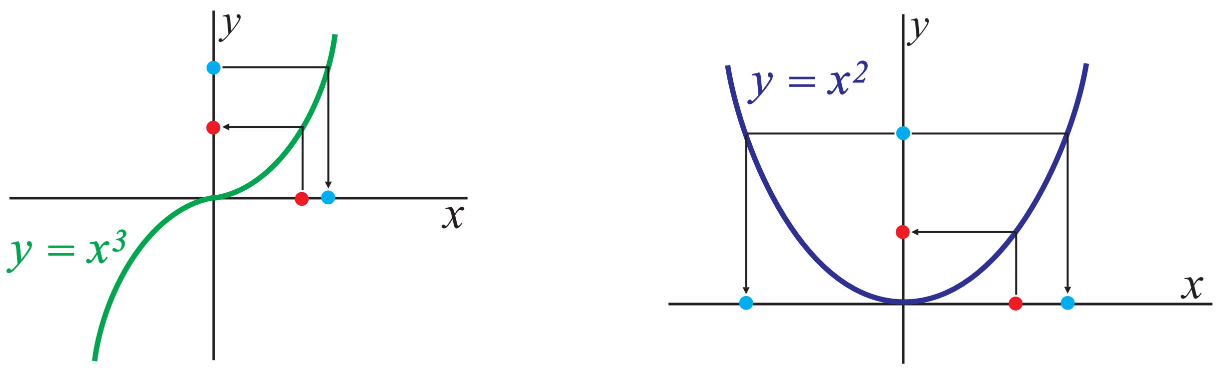
1. Tentukan turunan dari:
   a. $y = \ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$ • c. $y = \ln \sqrt[3]{x}$ •
   b. $y = \frac{1}{\ln x} + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ • d. $y = \ln(\sin x)$ •

2. Tentukan integral-integral berikut:

   a. $\int \frac{4}{2x+1}\, dx$ • b. $\int \frac{4x+2}{x^2+x+5}\, dx$ • c. $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$ • d. $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+2}\, dx$ •

3. Hitunglah $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right]$
   dengan cara menyusun bagian dalam kurung siku sebagai berikut,
   $\left[\frac{1}{1+1/n} + \frac{1}{1+2/n} + \cdots + \frac{1}{1+n/n}\right] \frac{1}{n}$
   lalu terapkan konsep integral tentu sebagai limit jumlah Riemann. •

Fungsi Invers dan Turunannya



Perhatikan grafik $y = x^3$ dan grafik $y = x^2$ pada gambar di atas.

Apakah setiap titik x berpasangan dengan satu titik y?

- Pada $y = x^3$, setiap satu titik y berpasangan dengan tepat satu titik x
- Pada $y = x^2$, ada titik y yang berpasangan dengan dua titik x

Definisi: Sebuah fungsi disebut *fungsi satu-satu*, bila untuk setiap titik y berpasangan hanya dengan satu titik x. Secara notasi matematika, $\forall x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Sifat: fungsi f bersifat satu-satu $\Longleftrightarrow$ f monoton murni ♠

Misalkan f fungsi satu-satu. Kita definisikan fungsi baru f^{-1}:

$$f^{-1}(b) = a \Longleftrightarrow f(a) = b$$

Fungsi ini dinamakan fungsi invers dari $f(x)$.

Dengan definisi ini maka berlaku sifat $D_{f^{-1}} = R_f$, dan $R_{f^{-1}} = D_f$

Sifat: $f^{-1}(f(a)) = a$ dan $f(f^{-1}(b)) = b$

- fungsi $y = f(x) = x^3$ mempunyai invers dengan aturan $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$
- fungsi $y = f(x) = x^2$ tidak mempunyai invers (bukan fungsi satu-satu).

Catatan: penulisan nama peubah/variabel pada fungsi invers tidak harus menggunakan huruf y, boleh saja menggunakan sebarang simbol, misalnya $f^{-1}(t)$ atau $f^{-1}(x)$. Hal yang perlu diperhatikan adalah formula dari aturan tersebut.

Latihan:

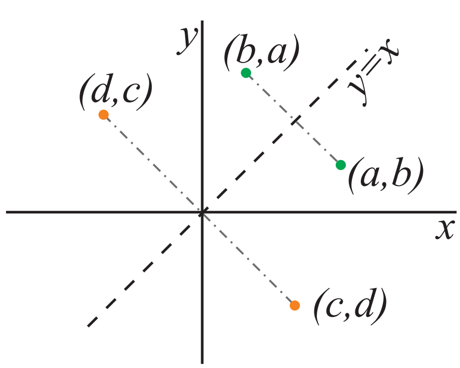
1. Tunjukkan $f(x) = x^5 + 2x + 1$ punya invers.
2. Tunjukkan $f(x) = 2x+6$ punya invers dan tentukan fungsi inversnya.
3. Tunjukkan $f(x) = \frac{x}{1-x}$ punya invers dan tentukan fungsi inversnya.

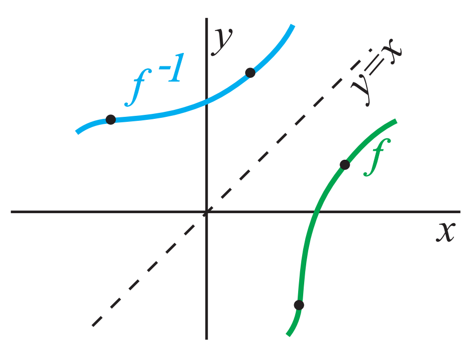
Menggambar Grafik Fungsi dan Inversnya

Misalkan diberikan grafik dari fungsi $f(x)$, kita akan menggambar grafik fungsi inversnya pada koordinat yang sama. Dengan demikian f dan f^{-1} keduanya kita tuliskan dalam variabel yang sama, yaitu x.

Prinsip: misalkan titik (a, b) pada grafik $f(x)$, maka titik (b,a) berada pada grafik f^{-1} (lihat gambar di bawah, sebelah kiri).

Dengan demikian grafik $f^{-1}(x)$ dapat diperoleh dari grafik $f(x)$ dengan mencerminkannya (titik demi titik) terhadap garis $y = x$ (gambar kanan).





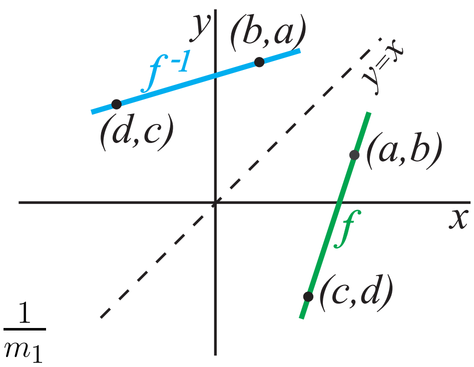
Turunan Fungsi Invers

Akan ditinjau hubungan turunan fungsi dengan turunan fungsi inversnya.

Pada gambar di samping, diberikan garis lurus $f(x)$ yang melalui titik (a,b) dan (c,d). Fungsi invernya $f^{-1}(x)$ adalah garis lurus yang melalui titik (b,a) dan $d,c)$.

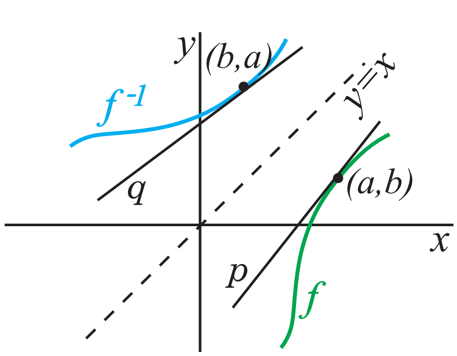
Gradien f di titik (a,b) adalah $m_1 = \frac{b-d}{a-c}$.

Gradien f^{-1} di titik (b,a) adalah $m_2 = \frac{a-c}{b-d} = \frac{1}{m_1}$



Dengan demikian, bila (a,b) pada grafik f maka $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$

Sekarang kita perhatikan untuk fungsi sebarang $f(x)$.



Terhadap fungsi f, kemiringan garis singgung di titik (a,b) adalah kemiringan garis p, yaitu $f'(a)$. Terhadap grafik f^{-1}, garis singgung singgung di titik (b,a) (garis q) merupakan cermin dari garis p terhadap gari $y = x$. Berdasarkan hasil di halaman sebelumnya, maka $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Sifat: Misalkan (x,y) pada grafik fungsi f maka $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Soal-Soal:

1. Tunjukkan $f(x) = \frac{x^3+1}{x^3+2}$, $x \leq -2$ punya invers dan tentukan f^{-1}.
2. Tentukan $(f^{-1})'(4)$ bila $= f(x) = x^2 + 2x + 1, \quad x \geq 0$.
3. Misalkan $f(x) = \int_0^x \sqrt{1+2t^2}\,dt, \quad x > 0$

   (a) Tunjukkan $f(x)$ punya invers. (b) Jika $f(2) = A$, tentukan $(f^{-1})'(A)$

Fungsi Eksponen Asli/Natural

Perhatikan kembali fungsi logaritma asli $f(x) = \ln x\,,\ \ x > 0$. Pada bahasan sebelumnya, fungsi ini monoton naik, sehingga mempunyai invers.

Misalkan $y = f(x)$, untuk mencari aturan fungsi inversnya kita harus menyatakan x dalam ekspresi y, yaitu $x = \cdots$.

Pada fungsi $\ln x$ hal ini tidak dapat dilakukan, $y = \ln x \Longleftrightarrow x = \cdots ?$

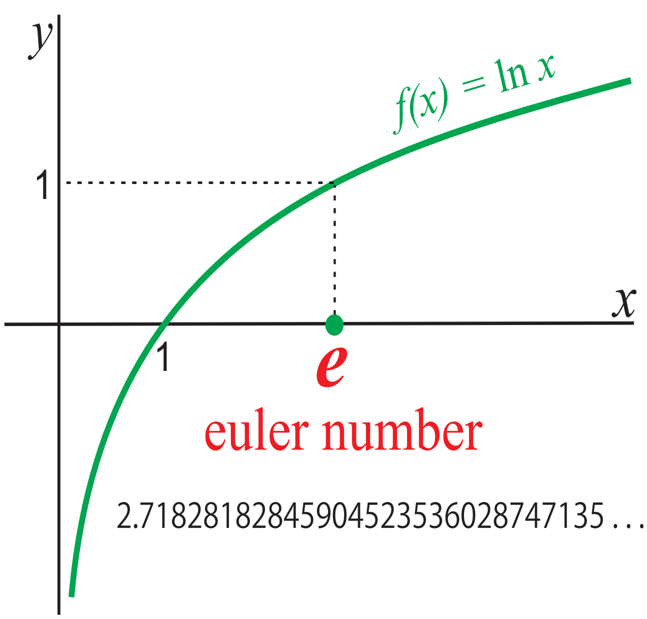
Karena kita tidak dapat menuliskan x dalam ekspresi y, maka didefinisikan notasi baru sebagai berikut:

Definisi: Fungsi invers dari $y = \ln x$ dinamakan fungsi eksponen asli dengan aturan/notasi $y = f(x) = \ln x \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y) = \exp y$

Dari sifat fungsi invers, $D_{f^{-1}} = \cdots$ dan $R_{f^{-1}} = \cdots$

Sifat: (a.) $\exp(\ln x) = x,\ \ x > 0$ dan (b.) $\ln(\exp y) = y,\ \ y \in \mathbb{R}$

Gambarkan grafik $f(x)=\ln x$ dan $g(x)=\exp x$ pada koordinat yang sama.



Bilangan Euler

Bilangan Euler adalah bilangan real yang bersifat $\ln e = 1$. Bilangan ini memegang peranan yang sangat penting dalam berbagai masalah matematika maupun teknik. Berikut disajikan salah satu informasi tentang bilangan ini.

$$\exp x = \exp(x \cdot 1) = \exp(x \ln e) = \exp(\ln e^x) = e^x.$$

Jadi fungsi e^x merupakan invers dari fungsi $\ln x$.

Dengan demikian diperoleh: $e^{\ln a} = a$ dan $\ln(e^b) = b$

Sifat-Sifat:

- $e^a e^b = e^{a+b}$ dan $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
- $D_x[e^x] = e^x$ ♠ sehingga $\int e^u \, du = e^u + c$

Soal-Soal

1. Tentukan $D_x[e^{\sqrt{x}}]$
2. Tentukan $\int e^{-4x} \, dx$ dan $\int x^2 e^{-x^3} \, dx$
3. Tentukan luas daerah yang dibatasi grafik $y = e^{-x}$ dan garis yang melalui titik $(0,1)$ dan $(1, \frac{1}{e})$.

Fungsi Eksponen Umum

Definisi: Misalkan $a > 0$ dan $x \in \mathbb{R}$, dibentuk fungsi $a^x := e^{x \ln a}$. Fungsi ini dinamakan fungsi eksponen umum.

Sifat-Sifat: 1. Misalkan $a, b > 0$ dan $x, y \in \mathbb{R}$

- $a^x a^y = a^{x+y}$ • $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ • $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(ab)^x = a^x b^x$ • $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

2. $D_x[a^x] = a^x \ln a$ ♠

3. $\displaystyle\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$

Contoh: 1. Tentukan $D_x[3^{\sqrt{x}}]$ ♠ 2. Tentukan $\displaystyle\int_1^2 2^{x^3} x^2 \, dx$ ♠

Fungsi Logaritma Umum

Fungsi logaritma umum merupakan invers dari fungsi eksponen umum

Misalkan $a > 0$ dan $a \neq 1$, $y = a^x \Longleftrightarrow x = \log_a y$

Sifat: • $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ • $D_x[\log_a x] = \dfrac{1}{x \ln a}$

Soal-Soal:

1. Tentukan (a) $D_x[x^x]$ ♠ (b) $D_x[(x^2+1)^{\sin x}]$ • (c) $D_x[(\ln x^2)^{2x+3}]$ •
2. Tentukan (a) $\int x \, 2^{x^2} \, dx$ ♠ (b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$ •
3. Misalkan $f(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$, $a > 0, a \neq 1$. Tunjukkan $f(x)$ punya invers dan cari rumus untuk $f^{-1}(x)$. •
4. Tunjukkan $\lim\limits_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ ♠

Pertumbuhan dan Peluruhan Eksponensial

Pada tahun 1975, penduduk dunia diperkirakan berjumlah $4 \cdot 10^9$ orang. Ingin diprediksi jumlah penduduk pada tahun 2009, bagaimana caranya? Para ahli biologi berusaha membuat *model pertumbuhan* yang dapat dipakai memprediksi jumlah penduduk tiap saat.

Salah satu model pertumbuhan mengatakan *laju pertambahan penduduk berbanding lurus dengan jumlah penduduk saat itu*. Kita harus menuliskan model tersebut dalam bentuk persamaan matematika. Misalkan y dan t masing-masing menyatakan banyaknya penduduk dan waktu (dalam satuan tahun). Tetapkan $t = 0$ sebagai tahun awal pengamatan yaitu 1975.

$$\frac{dy}{dt} = k\,y \qquad k = 0,0198 \quad \text{(konstanta, hasil statistik).}$$

Kita harus mencari fungsi $y(t)$ yang memenuhi persamaan diferensial di atas. Terapkan metode pemisahan variabel,

$$\frac{dy}{y} = k\,dt \iff \int \frac{dy}{y} = \int k\,dt \iff \ln|y| = kt + c$$

Karena y selalu positif maka $|y| = y$, jadi

$$\ln y = kt + c \iff y = e^{kt+c} \iff y = e^c\,e^{kt}$$

Untuk mencari nilai c, kita gunakan data $y(0) = 4 \cdot 10^9$

$$4 \cdot 10^9 = e^c\,e^0, \text{ jadi } e^c = 4 \cdot 10^9.$$

Jadi jumlah penduduk tiap saat $y = 4 \cdot 10^9\,e^{0,0198\,t}$

Prakiraan jumlah penduduk pada tahun 2009 ($t = 34$) adalah:

$$y = 4 \cdot 10^9\,e^{0,0198 \cdot 34} \approx 7,842003584 \cdot 10^9$$

Data World Bank, populasi penduduk tahun 2009: $6,775 \cdot 10^9$.

Diskusi:

- Untuk $t \longrightarrow \infty$, menuju nilai berapakah jumlah penduduk?
- Hal-hal apa saja yang membuat model ini tidak wajar?

Latihan:

1. Laju pembiakan bakteri adalah sebanding dengan jumlah bakteri saat itu. Jumlah bakteri pada Pk 12.00 adalah 10000. Setelah 2 jam jumlahnya menjadi 40000. Berapa jumlahnya pada pk 17.00?
2. Akibat memancarkan sinar radioaktif, Karbon-14 meluruh (berkurang beratnya) dan lajunya sebanding dengan jumlah zat saat itu. Waktu paruhnya (waktu untuk mencapai setengah beratnya) adalah 5730 tahun. Bila pada saat awal terdapat 10 gram, berapakan beratnya setelah 2000 tahun?

Model Pertumbuhan Logistik (optional)

Model pertumbuhan yang telah di bahas bukanlah model matematika yang ideal, karena bila t membesar terus, jumlah individu menuju nilai ∞. Hal ini tentunya tidak realistik. Bila jumlah individu terlalu banyak sedangkan jumlah makanan terbatas tentunya yang mati akan banyak. Model yang lebih baik adalah model logistik sbb.:

$$y' = ky(L - y), \quad k, L \text{ konstanta}$$

Berikut disajikan berbagai perilaku solusi persamaan di atas

Model Pertumbuhan Leslie (optional)

Pada model yang telah di bahas, tingkat kesuburan individu antara populasi muda dan dewasa tidak dibedakan. Pada keadaan nyata, hal ini tentunya berbeda. Untuk itu dikembangkan model yang lebih baik. Salah satu yang cukup terkenal adalah model pertumbuhan Leslie. Model ini akan dibahas pada perkuliahan Kalkulus 2B.

Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial, disingkat PD, adalah persamaan yang melibatkan turunan-turunan dari suatu fungsi $f(x)$.

Contoh-contoh:

1. $y' + 2\sin x = 0$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} - 2y = 0$
3. $y''' + (y')^5 - e^x = 0$

Turunan tertinggi yang muncul pada suatu PD disebut **orde** dari PD tersebut. Pada contoh di atas ordenya masing-masing satu, dua dan tiga.

Fungsi $y = f(x)$ disebut **solusi** dari suatu PD bila fungsi tersebut *memenuhi* PD tersebut. Sebagai contoh fungsi $y = \sin x$ merupakan solusi dari $y'' + y = 0$ (tunjukan !). Fungsi $y = \cos x$, juga merupakan solusi dari PD tersebut. Secara umum solusinya berbentuk $y = A\,\sin x + B\,\cos x$ dengan A dan B konstanta. **Solusi umum** dari PD orde n selalu memuat n buah konstanta. Bila sebuah PD dilengkapi dengan syarat-syarat maka konstanta pada solusi umum dapat dieliminasi. Solusi ini disebut **solusi khusus**. Sebagai ilustrasi bila PD $y'' + y = 0$ dilengkapi syarat $y(0) = 3$ dan $y'(0) = 0$ maka solusi khususnya $y = 3\,\cos x$

PD linear orde n: $y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = k(x)$

Fungsi $a_1(x), a_2(x), \cdots, a_n(x)$ disebut koefisien dari PD linear tersebut. Pada perkuliahan ini akan dibahas pencarian solusi untuk PD linear orde satu.

Perasamaan Diferensial Linear Orde Satu

Bentuk Umum : $y' + p(x)\,y = q(x)$

Tetapkan faktor pengintegral $e^{\int p(x)\,dx}$, lalu kalikan pada PD semula.

$$y'\,e^{\int p(x)\,dx} + y\,p(x)\,e^{\int p(x)\,dx} = q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}$$

$$\frac{d}{dx}[y\,e^{\int p(x)\,dx}] = q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}$$

$$y\,e^{\int p(x)\,dx} = \int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx$$

$$y = e^{-\int p(x)\,dx} \int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx$$

Contoh-contoh:

1. Tentukan solusi dari $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{\sin(3x)}{x^2}$, $y(1) = 0$. ♠
2. Tangki berisi 120 liter air asin, mengandung 75 gram garam. Air asin yang berisi 1,2 gram garam per liter memasuki tangki dengan laju 2 liter/menit dan air asin keluar dari tangki dengan laju sama. Jika larutan garam dalam tangki selalu homogen, tentukan konsentrasi garam dalam tangki setelah 1 jam dan untuk $t \to \infty$. ♠
3. Bila pada soal nomor 2, larutan yang bocor 3 liter/menit, tentukan konsentrasi garam dalam tangki setiap saat. Setelah berapa jam, larutan dalam tangki akan habis?

Penerapan Persamaan Diferensial Pada Masalah Kelistrikan

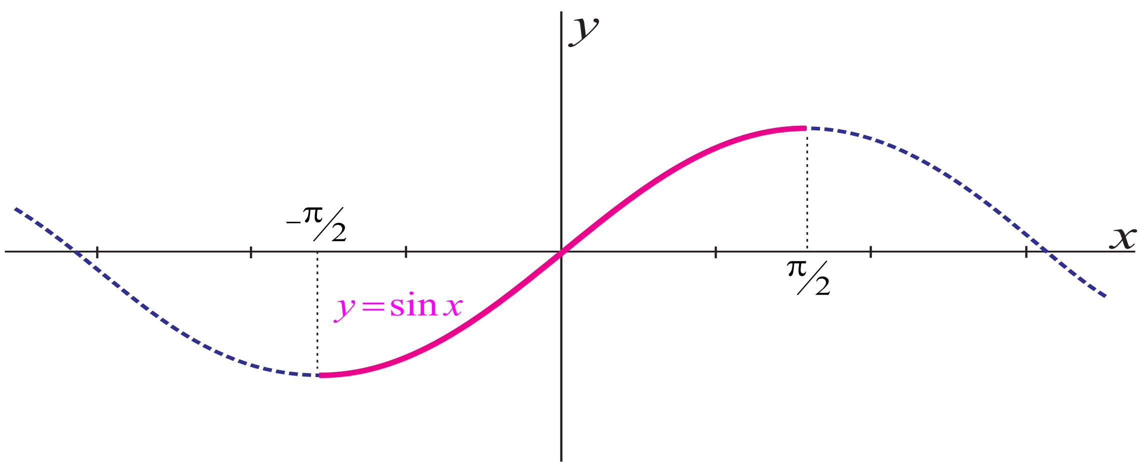
Pelajari secara mandiri dari buku : Varberg, Purcell, Rigdon, Calculus, 9^{ed}, page 357.

Fungsi Trigonometri Invers

Pada pasal ini akan dikaji fungsi invers dari fungsi-fungsi trigonometri. Sebagaimana diketahui, fungsi trigonometri bukanlah fungsi 1-1. Jadi supaya mempunyai invers, maka daerah definisinya harus dibatasi agar menjadi fungsi 1-1. Pembatasan biasanya dilakukan dengan mengambil inverval di sekitar titik pusat koordinat

Fungsi Invers Sinus

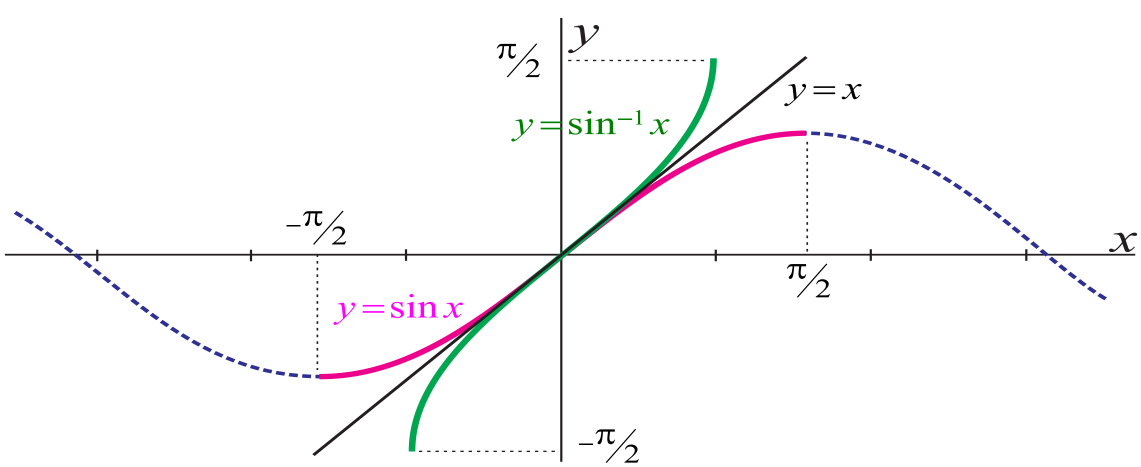
Perhatikan fungsi $\sin x$ berikut.



Fungsi invers sinus didefinisikan sebagai berikut:

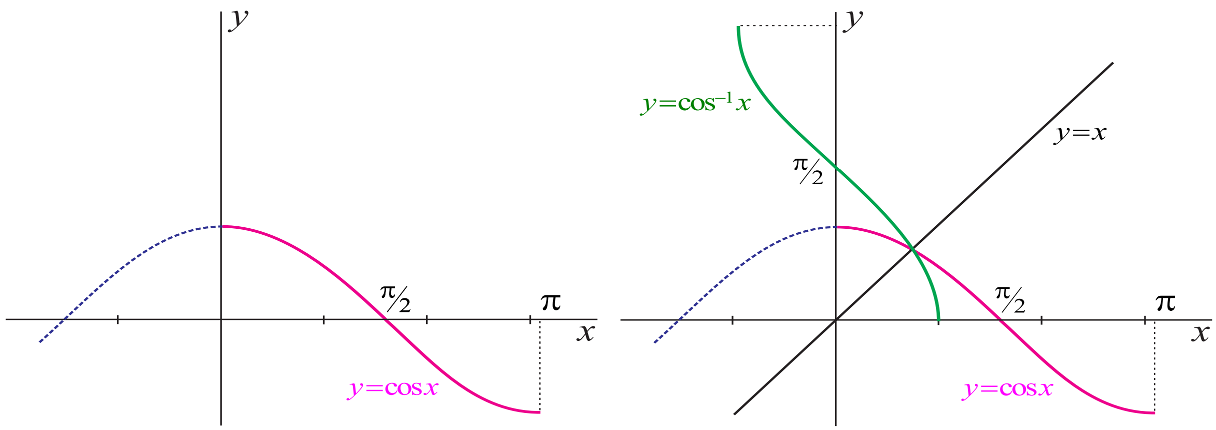
$$x = \sin^{-1} y \Longleftrightarrow y = \sin x \quad \text{dengan} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$D_{\sin^{-1}} = [-1, 1]$ dan $R_{\sin^{-1}} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



Fungsi Invers Cosinus

Agar fungsi $\cos x$ bersifat 1-1, diambil daerah definisinya sepanjang $[0, \pi]$.



Fungsi invers cosinus didefinisikan sebagai berikut:

$$x = \cos^{-1} y \Longleftrightarrow y = \cos x \quad \text{dengan} \quad 0 \le x \le \pi$$

$D_{\cos^{-1}} = [-1, 1]$ dan $R_{\cos^{-1}} = [0, \pi]$

Latihan: Hitunglah

(a.) $\sin^{-1}(\sqrt{2}/2)$

(b.) $\sin^{-1}(-\frac{1}{2})$

(c.) $\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)$

(d.) $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$

(e.) $\cos(\cos^{-1}(0,6))$

(f.) $\sin^{-1}(\sin(3\pi/2))$

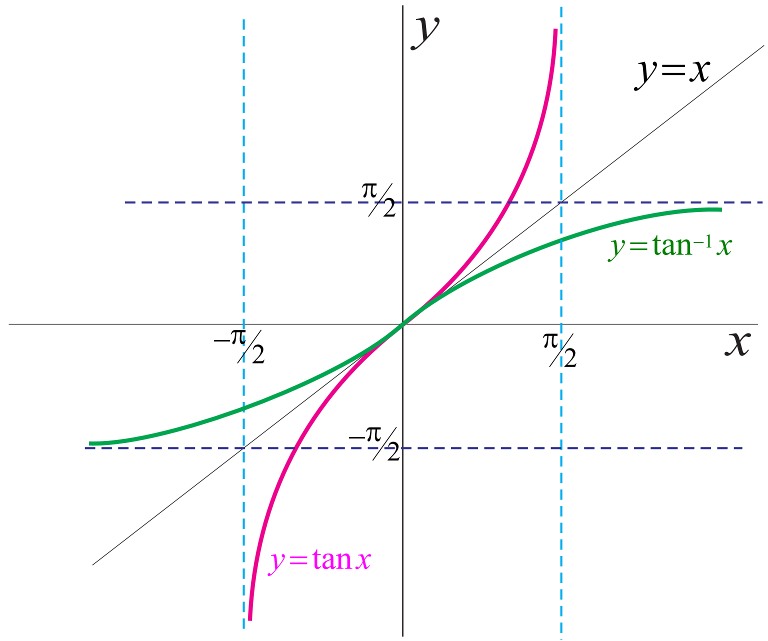
Catatan: Hati-hati dengan jawaban soal (f.)

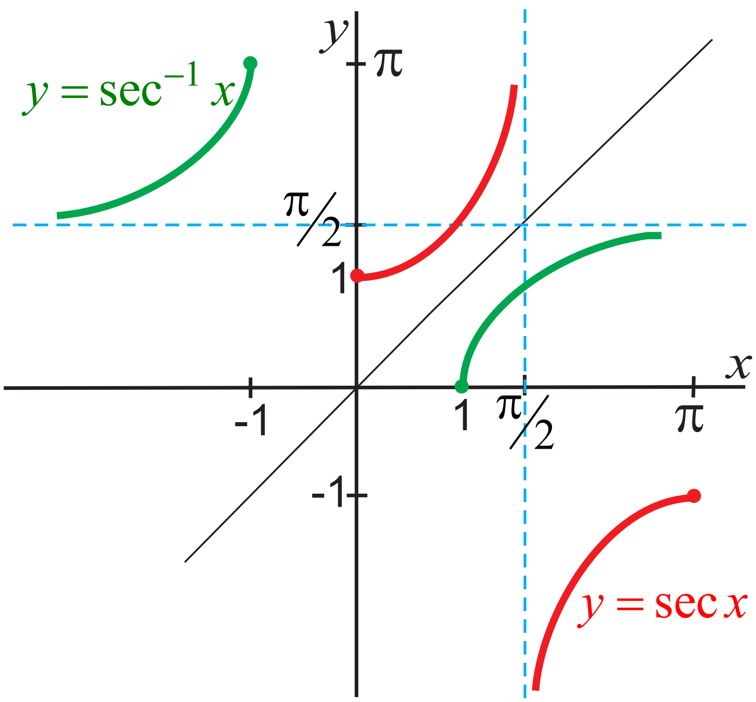
Fungsi Invers Tangens

$x = \tan^{-1} y \iff y = \tan x$

$D_{\tan^{-1}} = \mathbb{R}$

$R_{\tan^{-1}} = (-\pi/2, \pi/2)$





Fungsi Invers Secan

$x = \sec^{-1} y \iff y = \sec x$

$D_{\sec^{-1}} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

$R_{\sec^{-1}} = [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$

Sifat: $\sec^{-1} y = \cos^{-1}(\frac{1}{y})$

Sifat-Sifat

a. $\sin\left(\cos^{-1} x\right) = \sqrt{1 - x^2}$ ♠

b. $\cos\left(\sin^{-1} x\right) = \sqrt{1 - x^2}$

c. $\sec\left(\tan^{-1} x\right) = \sqrt{1 + x^2}$

d. $\tan\left(\sec^{-1} x\right) = \begin{cases} -\sqrt{x^2 - 1} & x \leq -1 \\ +\sqrt{x^2 - 1} & x \geq 1 \end{cases}$ ♠

Turunan Fungsi Trigonometri Invers:

a. $D_x[\sin^{-1} x] = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad -1 < x < 1$

b. $D_x[\cos^{-1} x] = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad -1 < x < 1$

c. $D_x[\tan^{-1} x] = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

d. $D_x[\sec^{-1} x] = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \qquad |x| > 1$

Akibat:

a. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \sin^{-1} x + c$

b. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \tan^{-1} x + c$

c. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\, dx = \sec^{-1} |x| + c$

Contoh-Contoh:

1. Tentukan (a) $D_x[\sin^{-1}(x^3+2x)]$ (b) $D_x[(\sec^{-1} x^2)^2]$
2. Tentukan (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{1+\cos^2\theta}\, d\theta$ $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$
3. Daerah yang dibatasi oleh $y = 5(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$, sumbu-$x$, sumbu-$y$ dan garis $x = 4$ diputar terhadap sumbu-x. Tentukan volumenya.
4. Pada ketinggian 8 km, sebuah pesawat bergerak horizontal dengan laju 0,3 km/detik, di atas Bu Hilda. Tentukan laju sudut elevasi antara pesawat dan Bu Hilda pada saat jarak keduanya 10 km.

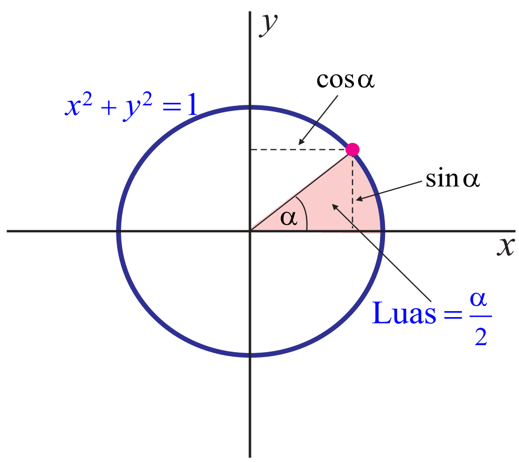
Fungsi-Fungsi Hiperbolik

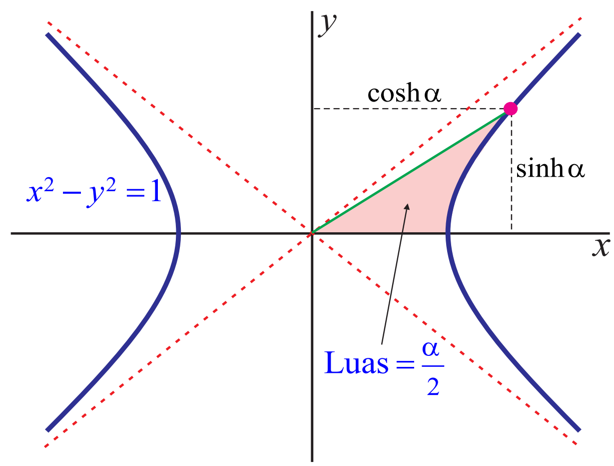
Fungsi hiperbolik merupakan fungsi yang dibentuk dari kombinasi fungsi exponen. Penamaan fungsi-fungsi hiperbolik mirip dengan nama fungsi-fungsi trigonometri. Hal ini disebabkan keduanya mempunyai struktur/sifat yang mirip.

Defnisi: Fungsi hiperbolik sinus dan hiperbolik cosinus didefinisikan sebagai berikut $\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ dan $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$

Sifat: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Ilustrasi berikut menggambarkan kemiripan fungsi trigonometri dengan fungsi hiperbol.



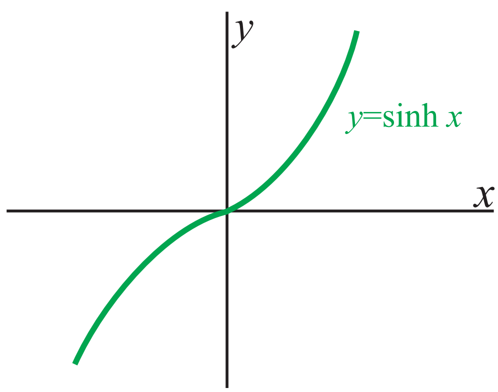


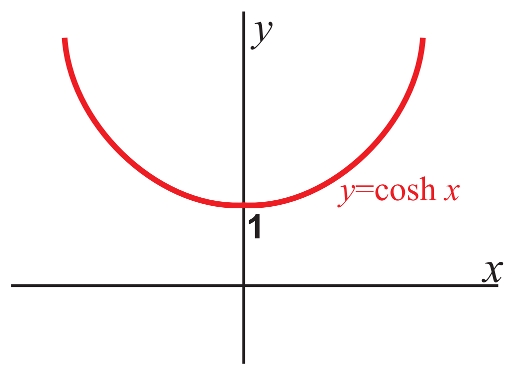
Hyperbolic functions were introduced in the 1760s independently by Vincenzo Riccati and Johann Heinrich Lambert. Just as the points $(\cos t, \sin t)$ *form a circle with a unit radius, the points* $(\cosh t, \sinh t)$ *form the right half of the equilateral hyperbola. Hyperbolic functions occur in the solutions of some important linear differential equations, for example the equation defining a catenary, and Laplace's equation in Cartesian coordinates. The latter is important in many areas of physics, including electromagnetic theory, heat transfer, fluid dynamics, and special relativity..*

Animasi berikut menggambarkan hubungan fungsi trigonometri dengan fungsi hiperbolik. *Animation*

Berikut ini disajikan beberapa sifat dasar fungsi $\sinh x$ dan $\cosh x$.

	$\sinh x$	$\cosh x$
daerah definisi	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
sifat fungsi	ganjil	genap
turunan fungsi	$\cosh x$	$\sinh x$
kemonotonan	naik	turun di $(-\infty, 0)$ naik di $(0, \infty)$
titik ekstrim	tidak ada	min. global di $x = 0$
kecekungan	cekung ke bawah di $(-\infty, 0)$ cekung ke atas di $(0, \infty)$	cekung ke atas
titik belok	$x = 0$	tidak ada





Defnisi: Fungsi hiperbolik lainnya didefinisikan sebagai berikut,

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \qquad \text{sech}\, x = \frac{1}{\cosh x} \qquad \text{csch}\, x = \frac{1}{\sinh x}$$

Sifat-Sifat:

$$1 - \tanh^2 x = \text{sech}^2 x \qquad 1 - \coth^2 x = -\text{csch}^2 x$$

$$D_x[\tanh x] = \text{sech}^2 x \qquad D_x[\coth x] = -\text{csch}^2 x$$

$$D_x[\text{sech}\, x] = -\text{sech}\, x \tanh x \qquad D_x[\text{csch}\, x] = -\text{csch}\, x \coth x$$

Contoh: Tentukan (a) $D_x[\cosh^2(3x-1)]$ (b) $\int \tanh x \, dx$

Fungsi Invers Hiperbolik

$$
\begin{aligned}
x = \sinh^{-1} y &\iff y = \sinh x \\
x = \cosh^{-1} y &\iff y = \cosh x \qquad x \geq 0 \\
x = \tanh^{-1} y &\iff y = \tanh x \\
x = \operatorname{sech}^{-1} y &\iff y = \operatorname{sech} x \qquad x \geq 0
\end{aligned}
$$

Fungsi invers hiperbolik dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi-fungsi logaritma sebagai berikut:

a. $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

b. $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \qquad x \geq 1$ ♠

c. $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad -1 < x < 1$

d. $\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \qquad 0 < x \leq 1$

Turunan Fungsi Invers Hiperbolik

$$
\begin{aligned}
D_x[\sinh^{-1} x] &= \tfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\
D_x[\cosh^{-1} x] &= \tfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad x > 1 \\
D_x[\tanh^{-1} x] &= \tfrac{1}{1-x^2} \qquad -1 < x < 1 \\
D_x[\operatorname{sech}^{-1} x] &= \tfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}} \qquad 0 < x < 1
\end{aligned}
$$