oki neswan (fmipa-itb)

Integral Tak Wajar

Pada Matematika I A/B sebelumnya telah didefinisikan integral tentu $\int_a^b f(x)\,dx$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$. Menurut Hukum Gravitasi, gaya yang dialami oleh sebuah objek dengan massa m berada pada jarak $x\,(> R)$ dari pusat Bumi adalah $F(x) = \frac{GMm}{x^2}$. Maka kerja yang diperlukan menaikkan benda tersebut dari permukaan bumu ke ketinggian Δh adalah

$$\int_R^{R+\Delta h} \frac{GMm}{x^2} dx \approx \int_R^{R+\Delta h} \frac{GMm}{x^2} dx = GMm \left(-\frac{1}{x}\right)_R^{R+\Delta h} = GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+\Delta h}\right).$$

Sebuah benda lepas dari pengaruh gravitasi Bumi jika $R \to \infty$. Jadi, energi yang diperlukan untuk itu adalah

$$\lim_{\Delta h \to \infty} \int_R^{R+\Delta h} \frac{GMm}{x^2} dx = \lim_{\Delta h \to \infty} GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+\Delta h}\right) = \frac{GMm}{R}. \tag{1}$$

Escape velocity adalah kecepatan minimum sebuah objek untuk lepas dari gaya tarik gravitasi objek lain. Jika v_0 adalah escape velocity objek dengan massa m, maka energi kinetiknya adalah $\frac{1}{2} m v_0^2$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{GMm}{R} \quad \text{sehingga} \quad v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Nilai $\lim_{\Delta h \to \infty} \int_R^{R+\Delta h} \frac{GMm}{x^2} dx$ pada (1) disingkat sebagai

$$\int_R^\infty \frac{GMm}{x^2} dx$$

dinamakan integral tak wajar.

Integral ini dinamakan integral tak wajar karena berbeda dengan integral pada Matematika I A/B sebelumnya yaitu integral tentu

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

dengan $a, b \in \mathbb{R}$.

Integral Tak Wajar dengan batas Tak Berhingga

Definition 1 (Integral tak wajar tipe I) 1. *Misalkan $f(x)$ kontinu pada $[a, \infty)$. Maka didefinisikan*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

*jika limit di ruas kanan ada dan berhingga, dikatakan $\int_a^b f(x)\,dx$ **konvergen** ke nilai limit. Jika tidak, $\int_a^b f(x)\,dx$ disebut **divergen**..*

2. *Misalkan $f(x)$ kontinu pada $(-\infty, b]$. Maka didefinisikan*

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

*jika limit di ruas kanan ada dan berhingga, dikatakan $\int_a^b f(x)\,dx$ **konvergen** ke nilai limit. Jika tidak, $\int_a^b f(x)\,dx$ disebut **divergen**...*

3. *Misalkan* $f(x)$ *kontinu pada* $(-\infty,\infty)$, $\int_0^\infty f(x)\,dx$ *dan* $\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$ ***konvergen***, *maka* $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ *konvergen dan*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$$

Jika tidak, $\int_a^b f(x)\,dx$ *disebut* ***divergen***.

Example 2

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \tan^{-1} x\Big]_a^0 = \tan^{-1}0 - \lim_{a\to-\infty}\tan^{-1}a = 0-\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Dengan cara serupa diperoleh $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\tan^{-1}b - \tan^{-1}0 = \frac{\pi}{2}$. *Maka*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Example 3 $\int_0^\infty xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} -\int_0^b xde^{-x}$

$$\begin{aligned}\int_0^b xde^{-x} &= xe^{-x}\Big]_0^b - \int_0^b e^{-x}dx = xe^{-x}\Big]_0^b + e^{-x}\Big]_0^b \\ &= be^{-b} - 0e^{-0} + e^{-b} - e^0 = be^{-b}+e^{-b}-1\end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned}\int_0^\infty xe^{-x}dx &= \lim_{b\to\infty}\left(1-be^{-b}-e^{-b}\right) = 1-\lim_{b\to\infty}\frac{b}{e^b} - \lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^b} \\ &= 1-\lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^b} - 0 = 1\end{aligned}$$

Problem 4 *Perlihatkan* $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^4}dx = \frac{1}{9}$

Problem 5 *Hitunglah* $\int_{-\infty}^0 e^{-|t|}dt$

Remark 6 *Karena* $\int_0^\infty xdx$ *divergen, maka* $\int_{-\infty}^\infty xdx$ *divergen. Mengapa* $\int_{-\infty}^\infty xdx$ *tidak dihitung dengan* $\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a xdx$? *Cara ini berasumsi bahwa laju mengintegral ke kiri dan ke kanan adalah sama. Karena fungsi* $f(x)=-x$ *ganjil, seperti diduga,* $\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a xdx = 0$. *Jadi,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} xdx \neq \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} xdx.$$

Selain itu $\int_{-\infty}^\infty xdx$ *tidak mengasumsikan apapun mengenai laju mengintegral ke kiri dan ke kanan. Bagaimana bila dihitung dengan laju berbeda?*

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{2a} xdx = \infty,\ \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{\frac{1}{2}a} xdx = -\infty$$

Berbeda. Jadi, menimbulkan ambiguitas.

Integral Tak Wajar dengan batas Tak Berhingga

Definisi integral $\int_a^b f(x)\,dx$ juga mengasumsikan bahwa $f(a), f(b)$ ada dan $f(x)$ adalah fungsi terbatas, yaitu ada m dan M sehingga

$$m < f(x) < M \text{ tiap } a \le x \le b$$

Oleh karena itu kita memerlukan definisi baru untuk menghitung $\int_a^b f(x)\,dx$ dengan $f(x)$ tak terbatas.seperti $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$. Masalah: $f(0)$ tidak ada dan $f(x)$ tak terbatas pada $(0,1]$,

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \infty.$$

Definition 7 1. *Misalkan $f(x)$ kontinu pada $(a,b]$ dan tidak kontinu di a. Maka*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

*jika limit di ruas kanan ada dan berhingga, dikatakan $\int_a^b f(x)\,dx$ **konvergen** ke nilai limit. Jika tidak, $\int_a^b f(x)\,dx$ disebut **divergen**.*

2. *Misalkan $f(x)$ kontinu pada $[a,b)$ dan tidak kontinu di b. Maka*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$$

*jika limit di ruas kanan ada dan berhingga, dikatakan $\int_a^b f(x)\,dx$ **konvergen** ke nilai limit. Jika tidak, $\int_a^b f(x)\,dx$ disebut **divergen**.*

3. *Jika f tidak kontinu pada c, dengan $a<c<b$, kontinu pada $[a,c)\cup(c,b]$, maka*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)\,dx + \lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

*jika $\int_a^c f(x)\,dx$ dan $\int_c^b f(x)\,dx$ konvergen, dikatakan $\int_a^b f(x)\,dx$ **konvergen** ke nilai limit. Jika tidak, $\int_a^b f(x)\,dx$ disebut **divergen**.*

Example 8 *Selidiki $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$. Integran $f(x)=\frac{1}{1-x}$ kontinu pada $[0,1)$ dan tidak kontinu pada $x=1$ dan* $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1-x}=\infty$. *Maka*

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{dx}{1-x} = \lim_{t\to 1^-} \ln|1-x|]_0^t = \lim_{t\to 1^-}\ln|1-t| - \ln 1 = \infty.$$

Maka $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ divergen.

Example 9 *Selidiki $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$. Integran $f(x)=\frac{1}{1-x}$ kontinu pada $[0,3]$ kecuali di $x=1$. Maka*

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{b\to 1^-} 3(x-1)^{\frac{1}{3}}\Big]_0^b$$

$$= \lim_{b\to 1^-} 3(b-1)^{\frac{1}{3}} - 3(0-1)^{\frac{1}{3}} = 0+3$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{a\to 1^+}\int_a^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{a\to 1^+} 3(x-1)^{\frac{1}{3}}\Big]_a^3$$

$$= 3(3-1)^{\frac{1}{3}} - \lim_{a\to 1^+} 3(a-1)^{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{2} - 0$$

Maka $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = 3+3\sqrt[3]{2} = 3\left(1+\sqrt[3]{2}\right)$.

Problem 10 *Hitunglah* $\int_0^3 \frac{x\,dx}{x^3-2x^2+x-2}, \int_{-1}^1 \ln|x|\,dx$.

Problem 11 *Tentukan semua nilai p agar $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ konvergen. Pertanyaan yang sama untuk* $\int_0^1 x^p \ln x dx$.

Problem 12 *Karena* $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)} = \frac{\sqrt{x}}{1+x} - \int \frac{\sqrt{x}dx}{(1+x)^2}$, *benarkah*

$$\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}\,(1+x)} = \frac{\sqrt{x}}{1+x}\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{(1+x)^2} \quad ?$$

Problem 13 (Teori) *Diketahui f kontinu pada $[0,\infty)$ kecuali di 1. Maka bagaimana anda akan mendefinisikan $\int_0^\infty f(x)\,dx$? Contoh: $\int_0^\infty \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)}$.*

Uji Banding Integral Tak Wajar (Pengayaan)

Theorem 14 (Uji Banding Langsung) *Misalkan* f *dan* g *kontinu pada* $[a, \infty)$ *dan* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *untuk tiap* $x \geq a$. *Maka*

1. $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *konvergen, jika* $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *konvergen.*
2. $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *divergen, jika* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *divergen.*

Theorem 15 (Uji Banding Limit) *Misalkan* f *dan* g *positif dan kontinu pada* a, ∞ *dan*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad 0 < L < \infty$$

Maka $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *dan* $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *keduanya konvergen atau keduanya divergen.*