oki neswan (fmipa-itb)

Deret Positif

Deret (tak berhingga) adalah ungkapan berbentuk

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

dengan a_i disebut suku. Penjumlahan ini berbeda dengan penjumlahan dua, tiga, atau berhingga bilangan. Maka, kita perlu ekstra hati-hati dengan deret. Misalkan $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \cdots$. Maka

$$2S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \cdots = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \cdots\right) = 1 + S.$$

Dengan demikian, $S = 1$. Kemudian untuk deret lain, misalkan $L = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$. Maka

$$2L = 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots = (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots) - 1 = L - 1$$

sehingga $2L = L - 1$ dan akibatnya $L = -1$, yaitu

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = -1!!!$$

Apa yang salah? Kesalahan pertama adalah sudah mengasumsikan bahwa $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$ merupakan bilangan real sehingga bisa menjadi objek operasi perkalian dan operasi penjumlahan. Kesalahan kedua adalah memperlakukan penjumlahan tak hingga bilangan seperti penjumlahan biasa (penjumlahan berhingga suku atau bilangan).

Pada deret, kita melihat bahwa kita menjumlahkan tak berhingga suku yang seperti dilihat diatas, sehingga perlu ditangani secara khusus. Persoalan mendasar adalah memperoleh 'jumlahan' tak berhingga suku. Pendekatan yang digunakan adalah dengan menggunakan hampiran. Apa yang digunakan untuk menghampiri jumlahan? Bagaimana menghampirinya? Diberikan deret $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$. Misalkan

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Tiap s_n disebut **jumlah parsial** dari n suku pertama. Terbentuk barisan jumlah parsial (s_n). Jika barisan (s_n) konvergen ke bilangan real S, maka dari pengertian limit barisan diketahui bahwa jumlah parsial s_n dapat dibuat sebarang dekat ke n jika n cukup besar. Dengan demikian, sangat mudah untuk menerima S sebagai jumlah semua a_i.

Definition 1 *Misalkan (s_n) adalah barisan jumlah parsial deret*

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

*Jika barisan (s_n) konvergen ke bilangan real $S, \lim_{n\to\infty} s_n = S$, maka deret dikatakan **konvergen** dan S disebut **jumlah** dari deret. Notasi:*

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots \text{ atau } S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

*Jika barisan (s_n) divergen, maka deret juga disebut **divergen**.*

Remark 2 *Jumlah sebuah deret adalah limit barisan jumlah parsialnya.*

Dengan demikian, dari Aturan Limit, diperoleh

Theorem 3 *Misalkan* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = A$ *dan* $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = B$, *dan* k *dan* l *bilangan real. Maka*

$$\sum_{i=1}^{\infty} (ka_i + lb_i) = kA + lB$$

Beberapa deret terkenal

1. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1$

2. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ divergen (Deret Harmonik)

3. $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{1}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$

4. $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{1}{2i-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$

5. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e$

   (a) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$

   (b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$

   (c) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^6} = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{945}$

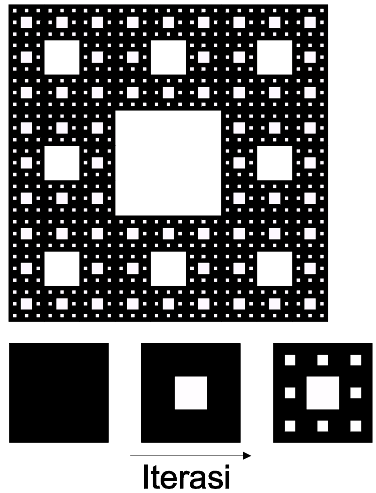
   (d) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^8} = 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \cdots = \frac{\pi^8}{9450}$

   (e) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{10}} = 1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \cdots = \frac{\pi^{10}}{93555}$

   (f) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{12}} = 1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \cdots = \frac{691\pi^{12}}{638512875}$

6. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots =???$ *open problem (Basel problem).*

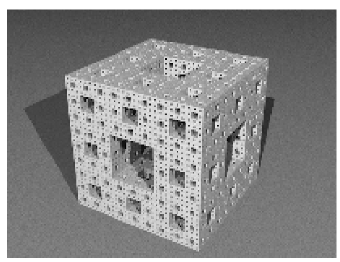
Saringan Sierpinski atau juga disebut Karpet Sierpinski



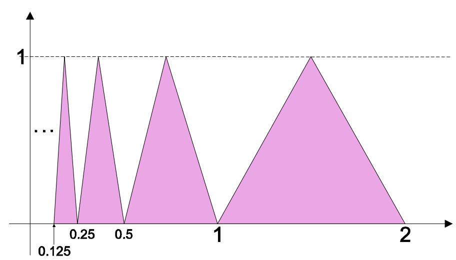
Misalkan luas karpet semula adalah 1 satuan luas, $A_0 = 1$. Maka

1. luas karpet hasil iterasi pertama adalah $A_1 = \frac{8}{9}$,
2. luas karpet hasil iterasi kedua adalah $A_2 = \ldots$
3. luas karpet hasil iterasi ketiga adalah $A_3 = \ldots.$
4. Secara umum, luas karpet hasil iterasi ke-n adalah $A_n = \ldots$
5. Hitunglah $\lim_{n\to\infty} A_n$.

Lakukan hal yang sama untuk busa Menger (*Menger sponge*):

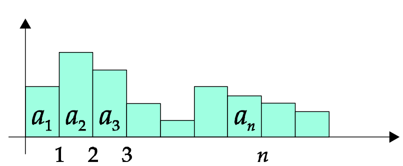


Hitunglah luas tak berhingga segitiga berikut.



Deret Positif

Deret positif adalah deret $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ dengan $a_i > 0$ untuk tiap $i \in \mathbb{N}$, yang dapat divisualisasikan sebagai



Masalah utama dalam deret adalah menguji kekonvergenan dan menentukan jumlahnya, jika deret tersebut konvergen. Disini kita akan mempelajari berbagai uji kekonvergenan dan uji kedivergenan.

Salah satu deret yang diketahui jumlahnya adalah **deret geometri**,

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

dengan r disebut rasio deret. Perhatikan bahwa

$$(1-x)\left(1+x+x^2+\cdots+x^n\right) = \left(1+x+x^2+\cdots+x^n\right) - \left(x+x^2+\cdots+x^{n+1}\right) = 1-x^{n+1}$$

Maka, jumlah parsial deret geometri ini adalah

$$s_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n = \frac{a\left(1-r^{n+1}\right)}{1-r}, \quad r \neq 1$$

Theorem 4 (Deret Geometri) *Deret geometri $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots$ konvergen bila $|r|<1$ dan jumlahnya adalah $\frac{a}{1-r}$.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1-r}, \quad \textit{jika } |r| < 1.$$

Jika $|r| \geq 1$, maka deret divergen.

Theorem 5 (Deret-p) *Deret-p $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$*

1. *konvergen jika $p > 1$*
2. *divergen jika $p \leq 1$.*

Theorem 6 (Uji Suku ke-n) 1. *Jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen, maka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

2. *Jika $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen.*

Remark 7 *Kesalahan umum: jika $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen.*

Contoh penyangkal: deret harmonik $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen sekalipun $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ disebut deret teleskopis atau deret kolaps karena jumlah parsialnya sejumlah suku-sukunya saling manghapuskan.

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\,(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Maka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Exercise 8 1. *Diberikan deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$. *Perlihatkan bahwa, untuk* $n > 4$,

$$s_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

Kemudian tentukan apakah deret konvergen dan jumlahnya, jika konvergen.

2. *Diberikan deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$. *Perlihatkan bahwa, untuk* $n > 6$,

$$s_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$

Kemudian tentukan apakah deret konvergen dan jumlahnya, jika konvergen.

3. *Misalkan* $b_1 = 1, b_2 = 1,$ *dan* $b_{n+2} = b_n + b_{n+1},$ *untuk* $n = 1, 2, 3, \ldots$.

   (a) *Perlihatkan bahwa* $\frac{1}{b_n b_{n+2}} = \frac{1}{b_n b_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1} b_{n+2}}$.

   (b) *Hitunglah* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n b_{n+2}}$.

Ada dua uji utama untuk kekonvergenan deret positif, yaitu uji integral dan uji banding (biasa dan limit) serta uji rasio

Theorem 9 (Aturan Integral) *Jika* $f(x)$ *kontinu, positif, dan monoton turun pada* $[1, \infty)$ *dan* $a_n = f(n)$ *untuk tiap* $n \in \mathbb{N}$. *Maka, deret* $\sum_{1}^{\infty} a_n$ *konvergen jika dan hanya jika* $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ *konvergen.*

Sedangkan

Theorem 10 (Uji Banding Biasa) *Misalkan* $0 \le a_n \le b_n$ *untuk tiap* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Jika* $\sum_{1}^{\infty} b_n$ *konvergen, maka* $\sum_{1}^{\infty} a_n$ *juga konvergen*

2. *Jika* $\sum_{1}^{\infty} a_n$ *divergen, maka* $\sum_{1}^{\infty} b_n$ *juga divergen.*

Theorem 11 (Uji Banding Limit) *Misalkan* $a_n \ge 0$, $b_n > 0$, *dan*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

1. *Jika* $0 < L < \infty$, *maka* $\sum_{1}^{\infty} a_n$ *dan* $\sum_{1}^{\infty} b_n$ *keduanya konvergen atau keduanya divergen.*

2. *Jika* $L = 0$ *dan* $\sum_{1}^{\infty} b_n$ *konvergen, maka* $\sum_{1}^{\infty} a_n$ *konvergen.*

Theorem 12 (Uji Rasio) *Misalkan* $\sum_{1}^{\infty} a_n$ *deret positif dan*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

1. *Jika* $L < 1$, *maka deret konvergen.*

2. Jika $L > 1$ atau $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, maka deret divergen.

3. Jika $L = 1$, maka uji ini tidak memberi kesimpulan..

Tiap uji memiliki keunggulan, kekurangan, dan tantangan tersendiri.

1. **Aturan Integral**: relatif mudah karena begitu diperoleh fungsi $f(x)$ yang memenuhi, maka masalah direduksi ke masalah kekonvergenan $\int_1^\infty f(x)\,dx$. Potensi kesulitan terdapat pada $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

   (a) Yang harus dilakukan:

      i. Tentukan fungsi kontinu $f(x)$ sehingga $f(n) = a_n$, tiap $n \in \mathbb{N}$.

      ii. Periksa bahwa $f(x)$ monoton turun.

      iii. Periksa kekonvergenan $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

   (b) Kesimpulan: $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergen jika dan hanya jika $\sum_1^\infty a_n$ konvergen.

   (c) Jika $f(x)$ monoton naik, gunakan Uji Suku ke-n.

2. **Uji Banding Biasa**: tantangan terletak pada menentukan barisan pembanding. Jika $\sum_1^\infty a_n$ diduga konvergen, maka perlu dicari deret $\sum_1^\infty b_n$ yang dominan ($a_n \le b_n$) dan konvergen. Sebaliknya jika $\sum_1^\infty a_n$ diduga divergen, perlu dibangun deret $\sum_1^\infty b_n$ sehingga $b_n \le a_n$ dan divergen. Kesulitan timbul jika sulit menduga apakah $\sum_1^\infty a_n$ konvergen atau divergen.

   (a) Yang harus dilakukan:

      i. Membuat perkiraan/dugaan apakah deret konvergen atau divergen..

      ii. Mencari deret pembanding: Jika $\sum_1^\infty a_n$ diperkirakan konvergen, cari $\sum_1^\infty b_n$ konvergen dengan $a_n \le b_n$. Jika $\sum_1^\infty a_n$ diperkirakan divergen, cari $\sum_1^\infty b_n$ divergen dengan $b_n \le a_n$.

   (b) Disarankan digunakan untuk deret yang meorip deret eometri atau deret-p.

   (c) Kekurangan uji ini: harus membuat dugaan apakah $\sum_1^\infty a_n$ konvergen atau tidak dan harus mencari deret pembanding yang tepat.

3. **Uji Banding Limit**: relatif lebih mudah. Bila a_n memuat bentuk $c^{f(n)}$ atau a_n merupakan bentuk rasional dalam n, maka disarankan menggunakan uji banding limit. Gunakan deret-p sebagai pembanding.

   (a) Yang harus dilakukan:

      i. Membuat perkiraan/dugaan apakah deret konvergen atau divergen..

      ii. Mencari deret pembanding: Jika $\sum_1^\infty a_n$ diperkirakan konvergen, cari $\sum_1^\infty b_n$ konvergen dengan $a_n \le b_n$. Jika $\sum_1^\infty a_n$ diperkirakan divergen, cari $\sum_1^\infty b_n$ divergen dengan $b_n \le a_n$.

   (b) Disarankan digunakan untuk deret rasional, deret yang mirip deret geometri atau deret-p.

(c) Kekurangan uji ini: harus membuat dugaan apakah $\sum_{1}^{\infty} a_n$ konvergen atau tidak dan harus mencari deret pembanding yang tepat.

4. **Uji Rasio**: Relatif mudah karena tidak perlu mencari deret lain untuk membandingkan. Kelemahan: tidak ada kesimpulan jika $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

   (a) Yang harus dilakukan: menghitung $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. dengan $a_n > 0$ tiap n.

   (b) Disarankan digunakan untuk deret yang memuat factorial.

   (c) Kekurangan uji ini: harus membuat dugaan apakah $\sum_{1}^{\infty} a_n$ konvergen atau tidak dan harus mencari deret pembanding yang tepat.

Example 13 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$. $\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+1)}} = \frac{1}{k+1}$. *Karena* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ *adalah juga deret harmonik, maka deret ini divergen. Maka, dengan menggunakan Uji Banding Biasa, dapat disimpulkan* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ *divergen.*

Cara lain: Lakukan Ujji Banding Limit dengan deret harmonik $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{\sqrt{k^2+k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{k^2}{k^2} + \frac{k}{k^2}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{k}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1.$$

Karena limit $L = 1 > 0$, *maka keduanya konvergen atau keduanya divergen. Deret harmonik divergen, maka deret* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ *juga divergen.*

Example 14 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7^k}{k!}$. *Misalkan* $a_k = \frac{7^k}{k!}$. *Karena memuat suku faktorial, maka dicoba menggunakan Uji Rasio.*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{7^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{7^k}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{7}{k+1} = 0.$$

Maka, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7^k}{k!}$ *konvergen.*

Example 15 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3+\cos 2k}$. *Karena* $\cos 2k \leq 1$, *maka* $3 + \cos 2k \leq 4$ *dan akibatnya* $\frac{1}{3+\cos 2k} \geq \frac{1}{4}$. *Jadi, barisan* $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ *dan oleh karena itu* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3+\cos 2k}$ *divergen, menurut Uji Suku ke-n.*

Example 16 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}-1}{6^{k-1}}$. *Karena* $\frac{3^{k-1}-1}{6^{k-1}} = \frac{3^{k-1}}{6^{k-1}} - \frac{1}{6^{k-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}$, *deret merupakan selisih dari dua deret geometri dengan rasio masing-masing* $\frac{1}{2}$ *dan* $\frac{1}{6}$, *keduanya konvergen. Maka* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}-1}{6^{k-1}}$ *konvergen dan*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}-1}{6^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{4}{5}.$$

Apakah perbedaan jawab di atas dengan jawab berikut?

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{k-1}-1}{6^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3^{k-1}}{6^{k-1}}-\frac{1}{6^{k-1}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{k-1}}{6^{k-1}} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{6^{k-1}}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{4}{5}$$

Example 17 *Apakah deret* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2+2k+3}$ *konvergen? Bandingkan dengan deret harmonik* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ *(mengapa?).*
Maka

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{k}{k^2+2k+3}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{k^2+2k+3} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{k}+\frac{3}{k^2}} = 1.$$

Karena $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ *divergen, maka menurut Uji Rasio deret* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2+2k+3}$ *juga divergen.*
Cara lain*: Karena* $k^2+2k+3=(k+1)^2-1\le(k+1)^2$ *, maka*

$$\frac{k}{k^2+2k+3}\ge\frac{k}{(k+1)^2}.$$

Sedangkan

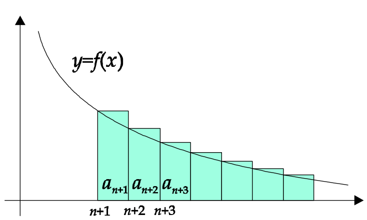
$$\int_1^{\infty}\frac{xdx}{(x+1)^2} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{xdx}{(x+1)^2} \overset{u=x+1}{=} \lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{(u-1)\,du}{u^2} = \lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{du}{u} - \lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{du}{u^2}$$

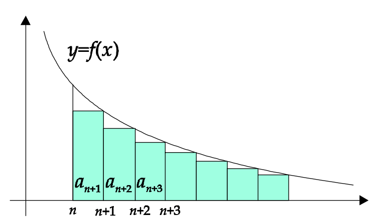
Suku pertama $\lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{du}{u} = \lim_{b\to\infty}\ln b-\ln 2 = \infty$. *Maka* $\int_1^{\infty}\frac{xdx}{(x+1)^2}$ *divergen sehingga menurut uji integral* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)^2}$ *divergen. Dengan demikian, menurut Uji Banding Biasa,* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2+2k+3}$ *juga divergen.*

Pengayaan: Akurasi Estimasi

Misalkan $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ adalah deret positif dan terdapat fungsi $f(x)$ yang memenuhi hipotesa Uji Integral: kontinu, monoton turun, $f(k)=a_k$. Maka $s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\le s_{n+1}$. Misalkan $R_n=S-s_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots$.

$$\int_{n+1}^{\infty}f(x)\,dx\le a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots\le\int_n^{\infty}f(x)\,dx$$





Jadi,

$$\int_{n+1}^{\infty}f(x)\,dx\le R_n\le\int_n^{\infty}f(x)\,dx.$$

Oleh karena itu, rentang nilai S adalah

$$s_n+\int_{n+1}^{\infty}f(x)\,dx\le S\le s_n+\int_n^{\infty}f(x)\,dx$$

Example 18 *Tentukan hampiran jumlah deret* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ *dengan kesalahan tidak lebih dari* 0.01.

$$\int_n^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{b\to\infty} \int_n^b \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty} -\frac{x^{-2}}{2}\bigg]_n^b = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2b^2} - \left(-\frac{1}{2b^2}\right) = \frac{1}{2n^2}.$$

Agar kesalahan $R_n \leq 0.0001 = 10^{-4}$, *diperlukan* n *agar* $\int_n^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2n^2} \leq 10^{-2}$ *atau* $10^2 \leq 2n^2$.

$$n \geq \sqrt{\frac{10^2}{2}} = 5\sqrt{2} \approx 7.0711.$$

Pilih $n = 8$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx s_8 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{8^3} = \mathbf{1.195160244}.$$

Example 19 *Kita dapat menggunakan rentang nilai untuk* ***memperoleh estimasi yang lebih baik****.*
Rentang nilai $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ *adalah*

$$1.195160244 + \frac{1}{2\times 9^2} \approx s_8 + \frac{1}{2\times 9^2} = s_8 + \int_9^{\infty} f(x)\,dx \leq S \leq s_8 + \int_8^{\infty} f(x)\,dx = s_8 + \frac{1}{2\times 8^2} \approx 1.195160244 + \frac{1}{2\times 8^2}$$

atau secara numerik

$$1.201\,372\,840 \leq S \leq 1.\,202\,972\,744$$

Maka kita memilih menggunakan titik tengah dari selang sebagai hampiran dari S, *yaitu*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = S \approx \frac{1.\,202\,972\,744 + 1.201\,372\,840}{2} = \mathbf{1.202\,172\,792}$$

Pemilihan titik tengah memberikan kesalahan yang terjadi tentu takkan lebih dari setengah panjang rentang yaitu tak lebih dari

$$\frac{1}{2}\left(\left(s_8 + \frac{1}{2\times 8^2}\right) - \left(s_8 + \frac{1}{2\times 9^2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\times 8^2} - \frac{1}{2\times 9^2}\right) = 8.198\,302\,469 \times 10^{-4} \quad !!!$$

Jadi, estimasi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx \mathbf{1.20219225}$ *mempunyai kesalahan tak lebih dari* $8.198\,302\,469 \times 10^{-4}$,. *jauh lebih baik dibandingkan estimasi oleh* s_8.