oki neswan (fmipa-itb)

Deret Taylor

Sebelumnya kita telah melihat bagaimana sebuah deret pangkat membangkitkan sebuah fungsi dengan domain merupakan interval kekonvergenan deret pangat tersebut. Sekarang kita melakukan hal sebaliknya. Jika $f(x)$ fungsi, maka ada dua pertanyaan yang ingin dijawab:

1. apakah ada deret pangkat yang membangkitkan $f(x)$?
2. jika ada,
   (a) apakah ada cara menentukan deret pangkat tersebut?
   (b) apakah deret pangkat konvergen pada seluruh domain f?

Deret pangkat tersebut disebut representasi dari $f(x)$ dalam bentuk deret pangkat.

Salah satu tujuan representasi sebuah fungsi dalam bentuk deret pangkat adalah untuk menghampiri fungsi dengan polinom, tidak hanya menghampiri, kita juga ingin tahu akurasi hampiran tersebut.

Turunan ke n fungsi f ditulis sebagai $f^{(n)}(x)$. Misalkan $f(x)$ mempunyai representasi deret pangkat,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$$

dengan radius kekonvergenan positif. Maka, dengan menggunakan teorema turunan deret pangkat,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \\
f''(x) &= 2!c_2 + 3!c_3(x-a) + 3\cdot 4c_4(x-a)^2 + 4\cdot 5!c_5(x-a)^3 + \cdots \\
f'''(x) &= 3!c_3 + 4!c_4(x-a) + 3\cdot 4\cdot 5c_5(x-a)^2 + \cdots \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= n!c_n + (n+1)!c_{n+1}(x-a) + 3\cdot 4\cdot \cdots \cdot (n+2)\,c_{n+2}(x-a)^2 + \cdots
\end{aligned}$$

Jadi,

$$f(a) = c_0; \quad f'(a) = c_1, \quad f''(a) = 2!c_2, \quad f^{(3)}(a) = 3!c_3, \ldots, f^{(n)}(a) = n!c_n, \ldots$$

Secara umum,

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Jika f mempunyai representasi deret pangkat, maka

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

salah satu alternatif representasi deret pangkat dari f. Ternyata tidak ada bentuk lain selain yang di atas.

Theorem 1 (Ketunggalan) *Jika*

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$$

untuk semua x dalam interval buka yang memuat a, maka

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Definition 2 *Misalkan $f(x)$ mempunyai turunan ke n untuk tiap $n = 1, 2, 3, \ldots$ pada suatu interval buka yang memuat a. Maka deret pangkat*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-1)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

disebut ***deret Taylor yang dibangkitkan oleh*** *f di $x = a$. Deret Taylor yang dibangkitkan oleh f di $x = 0$ disebut* ***deret Maclaurin yang dibangkitkan oleh*** *f,*

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)\,x^2}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Theorem 3 (Teorema Taylor) *Jika $f^{(n+1)}(x)$ ada pada suatu interval buka J yang memuat a, maka untuk tiap $x \in J$, terdapat c antara a dan x sehingga*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{1}$$

dengan $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ disebut suku sisa atau galat hampiran.

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

Theorem 4 (Teorema Estimasi Suku Sisa) *Jika terdapat M sehingga $\left|f^{(n+1)}(s)\right| \leq M$ untuk tiap s antara x dan a, maka suku sisa $R_n(x)$ memenuhi hubungan*

$$|R_n(x)| \leq M \times \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Polinom

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-a)^n$$

pada teorema di atas disebut **polinom Taylor orde** n dari f **berpusat di** a. Akurasi hampiran $f(x)$ oleh $P_n(x)$ diberikan Teorema Estimasi Suku Sisa.

Perhatikan bahwa untuk $n = 0$,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(c)}{1!}(x-a)$$

yang tidak lain adalah Teorema Nilai Rata-rata. Jadi, Teorema Taylor dapat dipandang sebagai perumuman dari Teorema Nilai Rata-rata. Hubungan $f(x) = f(a) + \frac{f'(c)}{1!}(x-a)$ dapat dipandang menyatakan: jika nilai $f(x)$ dihampiri oleh fungsi konstan $f(a)$, maka galatnya adalah $\frac{f'(c)}{1!}(x-a)$. Sebagai contoh untuk $n = 1$ dan $n = 2$:

1. Dari hubungan (1), kita peroleh untuk $n = 1$,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2.$$

   Artinya, jika $f(x)$ dihampiri oleh fungsi linear $P_1(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)$, maka errornya adalah $\left|f(x) - \left(f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)\right)\right| = \left|\frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2\right| = |R_1(x)|$.

2. Selanjutnya, untuk $n = 2$,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3,$$

   yang berarti jika $f(x)$ dihampiri oleh fungsi kudratik $P_2(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$, maka errornya adalah

$$\left|f(x) - \left(f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2\right)\right| = \left|\frac{f''''(c)}{2!}(x-a)^2\right| = |R_2(x)|.$$

Secara umum,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \text{untuk suatu } c \text{ antara } x \text{ dan } a.$$

adalah error atau galat yang terjadi, bila $f(x)$ dihampiri oleh polinom Taylor orde $n, P_n(x)$,

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-a)^n.$$

Contoh Tentukan deret Maclaurin dari $f(x) = x^2 \tan^{-1} x$. Karena $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots$, maka

$$f(x) = x^2 \tan^{-1} x. = x^3 - \frac{x^5}{3} + \frac{x^7}{5} - \frac{x^9}{7} + - \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{2n+3} \times x^{2n+3}.$$

Latihan Tentukan deret Maclaurin untuk $f(x) = \cos^2 x$. Terdapat dua cara: (1) mengalikan deret pangkat $\sin x$, yang kurang praktis, dan (2) gunakan identitas $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$.

Contoh Tentukan deret Maclaurin dan deret Taylor (berpusat di $x = 1$) dari $f(x) = \frac{1}{x^2-2x-3}$.

- Untuk deret Maclaurin

$$\frac{1}{x^2-2x-3} = -\frac{1}{3-(x^2-2x)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x^2-2x}{3}}.$$

Jadi,

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{x^2+2x}{3} + \frac{\left(x^2+2x\right)^2}{3^2} + \frac{\left(x^2+2x\right)^3}{3^3} + \cdots\right) \\
&= -\frac{1}{3} - \frac{\left(x^2+2x\right)}{3^2} - \frac{\left(x^2+2x\right)^2}{3^3} - \frac{\left(x^2+2x\right)^3}{3^4} - \frac{\left(x^2+2x\right)^4}{3^5} \cdots \\
&= -\frac{1}{3} - \frac{x^2+2x}{3^2} - \frac{x^4+4x^3+4x^2}{3^3} - \frac{x^6+6x^5+12x^4+8x^3}{3^4} - \frac{x^8+8x^7+24x^6+32x^5+16x^4}{3^5} \cdots \\
&= -\frac{1}{3} + \left(-\frac{2}{9}\right)x + \left(-\frac{1}{9} - \frac{4}{27}\right)x^2 + \left(-\frac{4}{3^3} - \frac{8}{3^4}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{3^3} - \frac{12}{3^4} - \frac{16}{3^5}\right)x^4 + \cdots \\
&= -\frac{1}{3} - \frac{2}{9}x - \frac{7}{27}x^2 - \frac{20}{81}x^3 - \frac{61}{243}x^4 - \cdots
\end{aligned}$$

Deret Maclaurin konvergen untuk $\left|\frac{x^2-2x}{3}\right| < 1$ atau

$$-3 < x^2 - 2x < 3$$
$$x^2 - 2x - 3 < 0 \text{ dan } x^2 - 2x + 3 > 0$$

Karena $x^2 - 2x + 3$ mempunyai diskriminan $4 - 12 < 0$ dan membuka ke atas, maka $x^2 - 2x + 3 > 0$ untuk tiap x. Jadi, cukup diperhatikan syarat $x^2 - 2x - 3 < 0$ yang setelah difaktorkan menjadi $(x+1)(x-3) < 0$, yaitu

$$-1 < x < 3.$$

- Untuk deret Taylor, diperlukan sedikit modifikasi sebagai berikut.

$$\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{1}{(x-1)^2-4} = -\left(\frac{1}{4}\right)\frac{1}{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}.$$

Maka, deret Taylor dari $f(x)$ berpusat di 1 adalah

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\left(\frac{1}{4}\right)\frac{1}{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{2k} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{2k}}{2^{2k+2}} \\
&= -\frac{1}{2^2} - \frac{(x-1)^2}{2^4} - \frac{(x-1)^4}{2^6} - \frac{(x-1)^6}{2^8} + \cdots
\end{aligned}$$

dengan syarat $\frac{|x-1|}{2} < 1$ atau $|x-1| < 2$, yaitu

$$-1 < x < 3.$$

Remark 5 (Hampiran Lokal) *Polinom Taylor sekitar $x = a$ memberikan hampiran fungsi secara lokal disekitar $x = a$.*

Latihan Berikan hampiran $\sin 4.8$ dengan kesaahan tak lebih dari 10^{-4}. Karena 4.8 lebih dekat ke $\frac{3\pi}{2}$ dibandingkan 0, maka akan digunakan polinom Taylor dengan pusat $a = \frac{3\pi}{2}$.

$$|R_n(4.8)| = \left| \frac{\sin^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \left(4.8 - \frac{3\pi}{2}\right)^{n+1} \right| \quad \text{untuk suatu } c \text{ antara } 4.8 \text{ dan } \frac{3\pi}{2}$$

Untuk tiap m, $\sin^{(m)} x$ adalah $\pm \sin x$ atau $\pm \cos x$. Jadi, $\left|\sin^{(m)} x\right| \leq 1$ untuk tiap x. Maka

$$|R_n(4.8)| = \left| \frac{\sin^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \left(4.8 - \frac{3\pi}{2}\right)^{n+1} \right| \leq \frac{\left|4.8 - \frac{3\pi}{2}\right|^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{\left|9 \times 10^{-2}\right|^{n+1}}{(n+1)!}$$

karena

$$\frac{\left(9 \times 10^{-2}\right)^3}{3!} = 0.000\,121\,5 > 10^{-4}$$
$$\frac{\left(9 \times 10^{-2}\right)^4}{4!} = \left(\frac{6561}{24}\right) \times 10^{-8} < \frac{7000}{25} \times 10^{-8} = 280 \times 10^{-8} = 2.8 \times 10^{-6} < 10^{-4}$$

Maka dipilih $n = 4 - 1 = 3$. Bangun polinom Taylor $P_3(x)$ dengan $a = \frac{3\pi}{2}$.

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1, \quad f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0,$$
$$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1, \quad , f^{(3)}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

Maka $P_3(x) = -1 + \frac{\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)^2}{2!}$. Karena $c_3 = 0$, maka sesungguhnya

$$P_3(x) = P_2(x).$$

Akibatnya menggunakan $P_3(x)$ sama dengan menggunakan $P_2(x)$. Maka agar akurasi **lebih terjamin** kita gunakan $P_4(x)$

$$P_4(x) = -1 + \frac{\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)^2}{2!} - \frac{\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)^4}{4!}.$$

Jadi,

$$\sin(4.8) \approx P_4(4.8) = -1 + \frac{\left(4.8 - \frac{3\pi}{2}\right)^2}{2!} - \frac{\left(4.8 - \frac{3\pi}{2}\right)^4}{4!}$$
$$\sin(4.8) \approx -0.996\,164\,609\,463$$

Catatan

$$\left|\sin 4.8 - P_3\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right| \approx 2.454215 \times 10^{-6}$$
$$\left|\sin(4.8) - P_4\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right| \approx 6.638417 \times 10^{-10}$$

Apabila kita menggunakan polinom Maclaurin, $a = 0$, maka suku sisa adalah $R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)(4.8-0)^{n+1}}{(n+1)!}$, c diantara 0 dan 4.8 Karena $\left|f^{n+1}(c)\right| \leq 1$

$$|R_n(x)| \leq \frac{|4.8|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Untuk mencapai batas 10^{-4}, diperlukan $n = 21$. Jadi, jauh lebih efisien menggunakan polinom Taylor dengan $a = \frac{3\pi}{2}$, karena lebih dekat ke 4.8.

Contoh Tentukan semua nilai x sehingga $\sin x$ dapat dihampiri oleh $P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ dengan kesalahan tak lebih dari 3×10^{-4}.

Karena deret Maclaurin $\sin x$ merupakan deret berganti tanda, maka

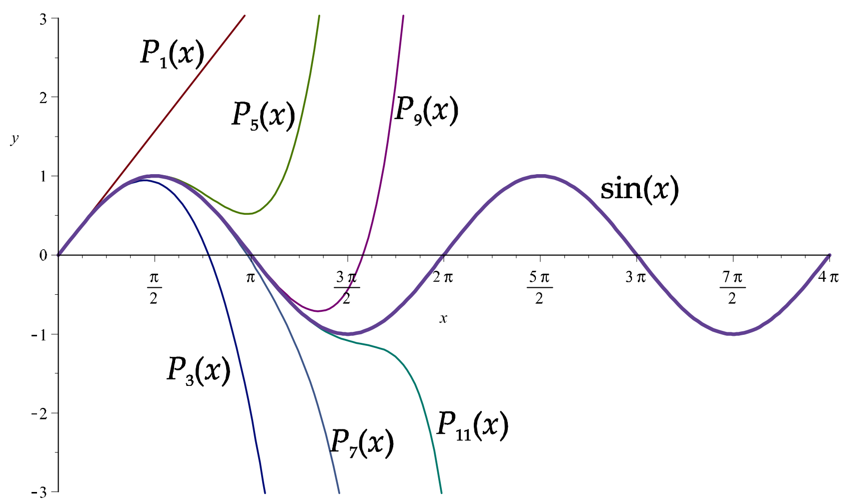
$$|\sin x - P_3(x)| = |\sin x - P_4(x)| \leq \frac{|x|^5}{5!}$$

Maka kesalahan $|\sin x - P_4(x)|$ tak lebih dari 3×10^{-4}, jika

$$\frac{|x|^5}{5!} < 3 \times 10^{-4} \text{ atau } |x| < \sqrt[5]{5! \times 3 \times 10^{-4}} \approx 0.514\,352\,079$$

Latihan Beri hampiran dari $\int_0^1 e^{\left(-x^2\right)} dx$ dengan kesalahan tak lebih dari 0.01.

Latihan Beri hampiran dari $\int_0^1 \cos\left(x^2\right) dx$ dengan kesalahan tak lebih dari 0.0001.



Beberapa Polinom Taylor fungsi $f(x) = \sin x$

POWER SERIES FOR ELEMENTARY FUNCTIONS

Function	*Interval of Convergence*
$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 - \cdots + (-1)^n (x-1)^n + \cdots$	$0 < x < 2$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$	$-1 < x < 1$
$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} + \cdots$	$0 < x \le 2$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$	$-\infty < x < \infty$
$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$	$-1 \le x \le 1$
$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots + \frac{(2n)!x^{2n+1}}{(2^n n!)^2(2n+1)} + \cdots$	$-1 \le x \le 1$
$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)x^2}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)x^4}{4!} + \cdots$	$-1 < x < 1$*

** The convergence at $x = \pm 1$ depends on the value of k.*