oki neswan (fmipa-itb)

Deret Pangkat

Kita akan mempelajari beberapa tehnik untuk menyajikan suatu fungsi $f(x)$ dalam bentuk deret pangkat (*power series*), yaitu menentukan derat pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ sehingga

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n .$$

Apabila hubungan ini tidak berlaku untuk seluruh x dalam domain f, kita ingin menentukan subset terbesar dalam domain f sehingga hubungan di atas masih berlaku. Salah satu alasan bentuk ini mirip polinom (hanya sukunya tak berhingga). Polinom cenderung mudah ditangani, kontinu, mempunyai turunan, dan terintegral. Jadi, bila $f(x)$ mempunyai penyajian dalam deret pangkat, kita dapat memanfaatkan kemudahan-kemudahan yang diperoleh dari kemiripan tersebut.

Definition 1 *Deret pangkat berpusat di $x = a$ adalah deret dalam bentuk*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a) = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \cdots + c_n (x-a)^n + \cdots .$$

Konstanta $c_0, c_1, c_2, \ldots$ disebut koefisien deret pangkat dan a disebut pusat.

Remark 2 *Perbedaan mendasar deret pangkat dari deret biasa adalah deret pangkat melibatkan variabel sehingga dapat membangkitkan fungsi.*

Contoh Untuk $a \neq 0$, deret pangkat

$$a + ax + ax^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} ax^n$$

mengingatkan kita pada deret pangkat dengan rasio n. Jadi,

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \frac{a}{1-x}, \quad \text{jika } -1 < x < 1.$$

Himpunan/Selang Kekonvergenan

Himpunan semua bilangan real x sehingga suatu deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ konvergen disebut himpunan kekonvergenan. Karena nanti terbukti bahwa himpunan ini selalu merupakan selang atau interval, maka lebih sering disebut **selang** atau **interval kekonvergenan**. Alat utama dalam menentukan interval kekonvergena sebuah deret pangkat adalah Uji Rasio Mutlak. Menurut Uji Rasio Mutlak, untuk tiap x, deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)$ konvergen jika limit berikut konvergen dan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} < 1$$

dan divergen bila $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} > 1$.

Misalkan limit berikut ada

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \rho, \quad \text{suatu } \rho \in \mathbb{R}.$$

Maka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|c_{n+1}(x-a)^{n+1}\right|}{|c_n (x-a)^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|\,|x-a|^{n+1}}{|c_n|\,|x-a|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} |x-a| = \rho\,|x-a|$$

Dengan demikian, jika $\rho \neq 0$,

- $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ konvergen jika $\rho |x-a| < 1$ atau $|x-a| < \frac{1}{\rho}$, dan
- $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ divergen jika $\rho |x-a| > 1$ atau $|x-a| > \frac{1}{\rho}$.

Nilai $\frac{1}{\rho}$ disebut **radius kekonvergenan**.

Dapat dibuktikan, sekalipun $\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$ divergen, terdapat interval $(-R+a, a+R)$ berpusat di a dan radius R dimana deret pangkat konvergen mutlak. Jika $R = 0$, maka deret pangkat konvergen hanya untuk $x = a$.

Theorem 3 *Untuk tiap deret pangkat* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, *terdapat* $R, 0 \leq R \leq \infty$, *sehingga* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ *konvergen untuk* $|x-a| < R$ *dan* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ *divergen untuk* $|x-a| > R$. *Jika* $\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$ *ada, maka* $\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{1}{R}$.

Sebagai akibat dari teorema diatas, maka himpunan kekonvergenan setiap deret selalu berbentuk salah satu selang:

1. $\{a\}$,
2. $(-\infty, \infty)$ yaitu seluruh bilangan real, atau
3. $(a-R, a+R), [a-R, a+R), (a-R, a+R], [a-R, a+R]$, dengan $0 < R < \infty$.

Contoh Tentukan selang kekonvergenan deret pangkat

$$1 - \frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{4}(x-3)^2 - \frac{1}{8}(x-3)^3 + - \cdots .$$

Bentuk suku ke-n adalah $\left(\frac{-1}{2}\right)^n (x-3)^n$. Maka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1} (x-3)^{n+1}\right|}{\left|\left(\frac{-1}{2}\right)^n (x-3)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{-1}{2}\right|^{n+1} |x-3|^{n+1}}{\left|\frac{-1}{2}\right|^n |x-3|^n} = \frac{1}{2}|x-3| .$$

Jika $|x-3| < 2$, maka $\frac{1}{2}|x-3| < 1$ sehingga $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n (x-3)^n$ konvergen mutlak. Jika $|x-3| > 2$, maka $\frac{1}{2}|x-3| > 1$ sehingga $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n (x-3)$ divergen. adi,

- $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n (x-3)^n$ konvergen, jika $|x-3| < 2$ atau jika $x \in (1, 5)$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n (x-3)^n$ divergen, jika $|x-3| > 2$ atau jika $x \in (-\infty, 1) \cup (5, \infty)$.

Untuk $|x-3| = 2$, yaitu $x = 5$ atau $x = 1$, kekonvergenan harus diperiksa secara tersendiri.

Untuk $x = 5$. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n (x-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$, divergen.

Untuk $x = 1$. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n (x-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n (-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1$, juga divergen.

Maka himpunan kekonvergenan dari deret pangkat $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n (x-3)^n$ adalah himpunan semua x sehingga $|x-3|<2$ atau interval $(1,5)$.

Contoh Tentukan selang kekonvergenan deret $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n(2x+3)^n}{4^n}$. Misalkan

$$a_n(x)=\frac{n(2x+3)^n}{4^n}=\frac{n2^n\left(x+\frac{3}{2}\right)^n}{4^n}=\frac{n\left(x+\frac{3}{2}\right)^n}{2^n}$$

Jadi,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(2x+3)^n}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\left(x+\frac{3}{2}\right)^n}{2^n}$$

Maka

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{(n+1)\left(x+\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{2^{n+1}}\right|}{\left|\frac{n\left(x+\frac{3}{2}\right)^n}{2^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)}{n}\frac{2^n}{2^{n+1}}\frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|\left|\frac{1}{2}\right|\left|\left(x+\frac{3}{2}\right)\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|\left|\frac{1}{2}\right|\left|x+\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2}\times\left|x+\frac{3}{2}\right|.\end{aligned}$$

Maka,

- deret konvergen jika $\frac{1}{2}\times\left|x+\frac{3}{2}\right|<1$ atau $\left|x+\frac{3}{2}\right|<2$ dan
- divergen jika $\frac{1}{2}\times\left|x+\frac{3}{2}\right|>1$ atau $\left|x+\frac{3}{2}\right|>2$

Dengan demikian radius kekonvegenan adalah 2 dan pusat deret adalah $-\frac{3}{2}$ yaitu $\left(-\frac{3}{2}-2,-\frac{3}{2}+2\right)=\left(-\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$. Selain itu deret divergen pada $\left(-\infty,-\frac{7}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$. Kita perlu memeriksa kekonvergenan di ujung-ujung selang $\left(-\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$. Perhatikan
Untuk $x=-\frac{7}{2}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\left(-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\right)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-2)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n \quad \text{jelas divergen.}$$

Untuk $x=\frac{1}{2}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(2)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}n \quad \text{jelas divergen.}$$

Maka, interval kekonvergenan deret $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n\left(x+\frac{3}{2}\right)^n}{2^n}$ adalah $\left(-\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Contoh Misalkan diketahui bahwa deret $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-3)^n$ konvergen pada $x=-1$ dan divergen pada $x=10$.
Tentukan kekonvergen deret pada $x=6$ dan $x=-7$
Misakan I adalah interval kekonvergen dari deret. Karena konvergen $|-1-3|=4$, maka interval kekonvergen memuat interval $[-1,3+4)=[-1,7)$,

$$[-1,7)\subseteq I$$

Karena $6\in[-1,7)$, deret konvergen pada $x=6$
Sedangkan karena deret divergen pada $x=10$, dan $|10-3|=7$, maka deret akan divergen pada selang

$$(-\infty,3-7)\cup[10,\infty)=(-\infty,-4)\cup[10,\infty).$$

Karena $-7\in(-\infty,-4)\cup[10,\infty)$, deret divergen pada $x=-7$.

$$[-1,7)\subseteq I\subseteq[-4,10).$$

Deret	Radius Kekonvegenan	Interval Kekonvergenan
$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$R=1$	$(-1,1)$
$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$	$R=0$	$\{0\}$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$	$R=1$	$[2,4)$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$	$R=\infty$	$(-\infty,\infty)$

Operasi pada Deret Pangkat

Misalkan J adalah selang kekonvergenan deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$. Maka untuk tiap $\hat{x} \in J$, karena konvergen di $\hat{x}$, maka $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (\hat{x}-a)^n$ adalah sebuah bilangan real. Dengan lain perkataan, kita melihat bagaimana sebuah deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ membangkitkan sebuah fungsi $f(x)$ dengan domain J. Hal ini dapat disingkat sebagai

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad \text{untuk tiap } x \in J.$$

Sebagai contoh,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \text{untuk tiap } x \in (-1,1).$$

Kita akan melihat beberapa operasi yang dapat dilakukan pada satu atau dua deret pangkat dan bagaimana menentukan interval kekonvergenan dan fungsi yang dibangkitkan deret pangkat baru. Misalnya $\sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-a)^n$ adalah deret pangkat dengan interval kekonvergenan J membangkitkan sebuah fungsi $g(x)$ dengan domain J. Kita tertarik misalnya pada interval kekonvergenan dan fungsi yang dibangkitkan deret pangkat

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-a)^{n+1}, \ \text{dan } \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n)(x-a)^n.$$

Masalah yang lebih sering ditemukan adalah kebalikannya. Sebagai contoh, kita ingin menentukan fungsi $f(x)$ yang dibangkitkan oleh deret pangkat

$$1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} + + \cdots.$$

Jika kita dapat menuliskannya sebagai hasil operasi atas satu atau lebih deret pangkat yang telah diketahui fungsi-fungsi yang dibangkitkannya, maka kita dapat menentukan $f(x)$. Dalam hal ini, deret di atas adalah jumlah dari dua deret,

$$1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} + + \cdots = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots\right) + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots\right)$$

Karena

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{2n+1} \quad \text{dan} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

maka $f(x) = \sin x + \cos x$,

$$\sin x + \cos x = 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} + + \cdots.$$

Operasi Kalkulus

Theorem 4 (Turunan dan Integral suku demi suku) *Misalkan $f(x)$ adalah fungsi yang dibangkitkan oleh $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ pada selang dengan radius kekonvergenan $R > 0$. Maka untuk tiap $x \in (a-R, a+R)$,*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(c_n (x-a)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (x-a)^{n-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots \\ \int_0^x f(t)\,dt &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x c_n (t-a)^n\,dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} = c_0 x + \frac{1}{2}c_1 x^2 + \frac{1}{3}c_2 x^3 + \cdots \\ \int f(t)\,dt &= C + \left(c_0 x + \frac{1}{2}c_1 x^2 + \frac{1}{3}c_2 x^3 + \cdots\right) \end{aligned}$$

Problem 5 *Beri penjelasan mengapa interval konvergensi tidak berubah.*

Theorem 6 *Jika $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ konvergen mutlak untuk $|x| < R$ dan f kontinu, maka $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (f(x))^n$ juga konvergen untuk $|f(x)| < R$.*

Contoh Untuk tiap $x, |x| < 1$, deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergen mutlak ke $\frac{1}{1-x}$. Maka $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$ konvergen mutlak pada $\frac{1}{1-2x}$ untuk tiap x dengan $|2x| < 1$ atau $|x| < \frac{1}{2}$.

Contoh Diketahui bahwa $\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$. Maka

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \quad \left|-x^2\right| < 1.$$

Karena $\left|-x^2\right| = \left|x^2\right|$. Maka syaratnya adalah $|x| < 1$. Dengan demikian,

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x (-1)^n x^{2n} dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots$$

untuk $|x| < 1$.

Operasi Aljabar

Theorem 7 *Misalkan $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ dan $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-a)^n$ pada selang berpusat di a dan radius kekonvergenan $R > 0$. Maka, deret*

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n)(x-a)^n &= f(x) + g(x) \\ \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n)(x-a)^n &= f(x) - g(x) \\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} c_j d_{n-j}\right)(x-a)^n &= f(x)\,g(x) \end{aligned}$$

pada interval yang sama.

Contoh Diketahui

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \text{ jika } |x| < 1. \\ \frac{1}{1-2x} &= 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, \text{ jika } |x| < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned} 1+(1+2)\,x+(1+2+4)\,x^2+(1+2+4+8)\,x^3+\cdots &= \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-2x}\right) \\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}2^{j-1}\right)x^n &= \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-2x}\right)=\frac{1}{2x^2-3x+1} \end{aligned}$$

untuk tiap $|x|<\frac{1}{2}$ Jadi, seolah-olah kita mengalikan dua suku banyak.

$$\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)\times\left(1+2x+4x^2+8x^3+\cdots\right)=1+(1+2)\,x+(1+2+4)\,x^2+(1+2+4+8)\,x^3+\cdots$$

Contoh Tentukan deret pangkat dari $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$. Karena $\frac{1}{(1-x)^2}=-\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}$, dan $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ untuk $|x|<1$, maka

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1},\quad \text{untuk } |x|<1.$$

Contoh Misalkan $S(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t^5}$. Berikan hampiran $S\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1+x^5}dx$ dengan ketelitian tak lebih dari 10^{-10}.

$$\frac{1}{1+x^5}=\frac{1}{1-(-x^5)}=1-x^5+x^{10}-x^{15}+-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,x^{5n},\quad \text{untuk } \left|x^5\right|<1,\ \text{yaitu } |x|<1.$$

Maka

$$\begin{aligned} \int\frac{dx}{1+x^5} &= x-\frac{x^6}{6}+\frac{x^{11}}{11}-\frac{x^{16}}{16}+-\cdots \\ \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1+x^5} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5n+1}x^{5n+1}\Big]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\frac{1}{2^6}+\frac{1}{11}\frac{1}{2^{11}}-\frac{1}{16}\frac{1}{2^{16}}+-\cdots \end{aligned}$$

Misalkan $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(5n+1)2^{5n+1}}$ sebuah deret berganti tanda. Maka

$$|S-s_n|<a_{n+1}=\frac{1}{(5\,(n+1)+1)\,2^{5(n+1)+1}}=\frac{1}{(5n+6)\,2^{5n+6}}.$$

Nilai n akan memenuhi $\frac{1}{(5n+6)2^{5n+6}}<10^{-10}$ jika

$$\begin{aligned} 2^{5n+6} &= 2^{5n}\times 64>(5n+6)\,10^{10} \\ 2^{5n} &> \frac{(5n+6)\,10^{10}}{64}=(5n+6)\,5^6\times 10^4 \end{aligned}$$

Jelas sulit untuk menyelesaikan pertidaksamaan di atas. Kita ketahui bahwa (a_n) monoton turun. Maka kita bisa mencoba n sehingga $a_n<10^{-10}$. Ternyata

$$a_6=\frac{1}{(5\times 6+1)\,2^{5\times 6+1}}\approx 1.5\times 10^{-11}$$

Maka dapat dipilih s_5 sebagai hampiran yang memenuhi syarat ketelitian di atas.

$$\begin{aligned} s_5 &= \frac{1}{2}-\frac{1}{6}\frac{1}{2^6}+\frac{1}{11}\frac{1}{2^{11}}-\frac{1}{16}\frac{1}{2^{16}}+\frac{1}{21}\frac{1}{2^{21}}-\frac{1}{26}\frac{1}{2^{26}} \\ &\approx 0.497\,439\,290\,996\,972 \end{aligned}$$

Titik tengah

$$\frac{|s_5+s_6|}{2}=\frac{|s_5+s_5+a_6|}{2}=|s_5|+\frac{|a_6|}{2}$$

memberi ketelitian yang lebih baik yaitu $\frac{a_6}{2}$,

$$S \approx 0.497\,439\,290\,996\,972 + \frac{\frac{1}{31}\frac{1}{2^{31}}}{2} \approx 0.497\,439\,291\,004\,483$$

dengan kesalahan tak lebih dari

$$\frac{|a_6|}{2} = \frac{\frac{1}{31}\frac{1}{2^{31}}}{2} = 7.\,510\,665\,924\,318\,38 \times 10^{-12}.$$

Hasil sampai dengan 20 angka dibelakang koma dengan Maple adalah

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^5} dx = 0.49743929101160004317...$$

$$\begin{aligned}
|0.49743929101160004317 - 0.497\,439\,290\,996\,972\,| &= 1.\,462\,804\,317\,000\,00 \times 10^{-11} < 10^{-10} \\
|0.49743929101160004317 - 0.497\,439\,291\,004\,483| &= 7.117\,043\,17 \times 10^{-12} < \frac{|a_6|}{2}
\end{aligned}$$

Beberapa Deret Pangkat Penting

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots, \quad |x| < 1 \\
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \text{ semua } x \\
\tan^{-1} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad |x| < 1 \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots, \quad |x| < 1
\end{aligned}$$