oki neswan (fmipa-itb)

Dalil l'Hôspital dan Bentuk Tak Tentu

Aturan limit

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to c}f(x)}{\lim_{x\to c}g(x)}$$

hany dapat digunakan jika $\lim_{x\to c}g(x)\neq 0$. Maka teorema atau aturan tersebut tidak dapat digunakan untuk

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x},\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8},\ \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c},$$

Limit ketiga adalah limit yang khusus, nilai limit ini disebut turunan dari f di c. $\lim_{x\to c}f(x)\neq 0$, maka $\frac{\lim_{x\to c}f(x)}{\lim_{x\to c}g(x)}=\pm\infty$, tergantung pada nilai $\lim_{x\to c}f(x)$.

Dalil l'Hospital merupakan metoda untuk menyelesaikan $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ jika $\lim_{x\to c}f(x)=0=\lim_{x\to c}g(x)$, disebut bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$. Jika syarat-syaratnya dipenuhi, maka

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dalil l'Hosiptal dapat diperluas untuk kasus $\lim_{x\to c}f(x)=\lim_{x\to c}g(x)=\pm\infty$, disebut bentuk tak tentu $\frac{\infty}{\infty}$.

Theorem 1 (l'Hospital) *Misalkan* $\lim_{x\to c}f(x)=\lim_{x\to c}g(x)=0$ *dan* $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *ada (hingga atau tak berhingga). Maka*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Teorema berikut digunakan untuk membuktikan teorema di atas

Theorem 2 *Misalkan fungsi* f *dan* g *kontinu pada* $[a,b]$ *dan mempunyai turunan pada* (a,b). *Jika* $g'(x)\neq 0$ *untuk tipa* $x\in(a,b)$, *maka terdapat* $c\in(a,b)$ *sehingga*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Berikut adalah bukti bagi versi sederhana dari Teorema l'Hospital.

Lemma 3 *Jika* $f(x)$ *mempunyai turunan di* c, *maka terdapat fungsi* $E(x)$ *sehingga*

$$f(x)=f(a)+f'(c)(x-c)+E(x)\ \ \textit{dan}\ \lim_{x\to c}\frac{E(x)}{x-c}=0.$$

Misalkan $f(x)$ dan $g'(x)$ mempunyai turunan di c. Maka menurut lemma di atas terdapat $E_1(x)$ dan $E_2(x)$ sehingga

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+E_1(x)\ \text{ dan }\ \lim_{x\to c}\frac{E_1(x)}{x-c}=0$$

$$g(x)=g(c)+g'(c)(x-c)+E_2(x)\ \text{ dan }\ \lim_{x\to c}\frac{E_2(x)}{x-c}=0$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{x\to c}\frac{f'(c)+f'(c)(x-c)+E_1(x)}{g'(c)+g'(c)(x-c)+E_2(x)}\\&=\lim_{x\to c}\frac{f'(c)(x-c)+E_1(x)}{g'(c)(x-c)+E_2(x)}\\&=\lim_{x\to c}\frac{f'(c)+\frac{E_1(x)}{x-c}}{g'(c)+\frac{E_2(x)}{x-c}}=\frac{f'(c)+0}{g'(c)+0}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\end{aligned}$$

Maka terbukti

Theorem 4 (Simplified l'Hospital) *Jika $f(x)$ dan $g'(x)$ mempunyai turunan di c, maka*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Selain itu Dalil l'Hospital juga berguna untuk menjawab masalah mengenai kekontinuan (*continuity*) dan keterturunkanan (*differentability*). Fungsi $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ tidak terdefinisi di 0. Dapatkah $f(x)$ diperluas sehingga setelah diperluas f menjadi kontinu di 0? Grafiknya menyerupai grafik yang kontinu disetiap x, kecuali berlubang di 0. Dalil l'Hospital memberikan

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 0}{1} = 1.$$

Maka fungsi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

kontinu dimana-mana. Apakah $f(x)$ ini mempunyai turunan di 0?

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \overset{L}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} \overset{L}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

Tanda $\overset{L}{=}$ menyatakan penggunaan dalil l'Hospital.

Bentuk Tak Tentu: $0 \cdot \infty$ dan $\infty - \infty$

Kadang-kadang kita harus berhadapan bentuk tak tentu selain $\frac{0}{0}$ dan $\frac{\infty}{\infty}$. Dengan sedikit perjuangan, dapat dikembalikan ke bentuk $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$. Sebagai contoh $\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x}$ mempunyai bentuk $0 \cdot \infty$. Agar Teorema l'Hospital dapat digunakan, fungsi harus diubah ke bentuk hasil bagi dua fungsi.

$$\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \overset{L}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\cos \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right) = 1$$

Demikian juga, bentuk $\infty - \infty$ harus diubah ke bentuk hasil bagi dua fungsi.agar Teorema l'Hospital dapat digunakan.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{3x+1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{(3x+1)\sin x - x}{x \sin x} \overset{L}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to 0^+} \frac{3 \sin x + (3x+1)\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} \overset{L}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to 0^+} \frac{3 \cos x + 3 \cos x - (3x+1)\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} \\ &= \frac{3+3}{2} = 3 \end{aligned}$$

Bentuk Tak Tentu: $0^0, \infty^0$, dan 1^∞

Limit-limit dengan bentuk $0^0, \infty^0$, dan 1^∞ biasanya diselesaikan dalam tiga langkah: (1) melakukan logaritma pada fungsi, (2) menentukan limit dari $\ln y$, dengan menggunakan Teorema l'Hospital, (3) Menentukan limit fungsi semula dengan eksponensiasi. Sebagai contoh, perhatikan

$$\lim_{x \to 0^+} (x+1)^{\cot x}$$

Ketika $x \to 0^+$, basis $x + 1$ menuju 0 sedangkan $\cot x$ menuju ∞. Akibatnya, kita tidak dapat segera memperoleh limitnya. Kita membutuhkan bantuan logaritma.

$$\begin{aligned} y(x) &= (x+1)^{\cot x} \\ \ln y(x) &= \cot x \ln(x+1) = \frac{(\cos x)(\ln x + 1)}{\sin x} \end{aligned}$$

Bentuk Logaritma $\ln y$ pada ruas kanan berupa pembagian dan ini membuka pintu penggunaan dalil l'Hospital.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \ln y(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x)(\ln x + 1)}{\sin x} \overset{L}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(-\sin x)(\ln x + 1) - (\cos x)\left(-\frac{1}{x+1}\right)}{\cos x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

Kita memperoleh $\lim_{x\to 0} \ln y(x)$, tetapi yang diinginkan adalah $\lim_{x\to 0} y(x)$. Gunakan eksponensial.

$$\lim_{x\to 0} y(x) = \lim_{x\to 0} e^{\ln y(x)} = e^{\lim_{x\to 0} \ln y(x)} = e^1 = 1$$

Theorem 5 *Jika* $\lim_{x\to a} \ln y(x) = L,$ *maka*

$$\lim_{x\to a} y(x) = \lim_{x\to a} e^{\ln y(x)} = e^L.$$