

Catatan Teknik (*Technical Notes*)

Deformasi Gelombang Air Sinusoidal Menjadi Gelombang Cnoidal

Syawaluddin Hutahaean

Kelompok Keahlian Teknik Kelautan, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, Institut Teknologi Bandung
Jl. Ganesha No. 10 Bandung 40132, E-mail: syawaluddin@ocean.itb.ac.id

Abstrak

Pada paper ini disajikan hasil pemodelan numeris gelombang air dengan menggunakan persamaan kontinuitas dan persamaan momentum dari Euler. Pada persamaan momentum disubstitusikan sifat irrotasional aliran air dan persamaan dikerjakan pada permukaan. Persamaan kontinuitas diintegrasikan terhadap kedalaman, dengan menggunakan kecepatan rata-rata kedalaman untuk mendapatkan persamaan muka air seperti pada persamaan gelombang panjang Airy. Selanjutnya persamaan muka air dan persamaan momentum permukaan diselesaikan secara numeris, dengan merumuskan terlebih dahulu relasi antara kecepatan rata-rata kedalaman dengan kecepatan permukaan. Hasil penting dari model adalah bahwa pada perairan dangkal, gelombang sinusoidal berdeformasi menjadi gelombang cnoidal, dimana gelombang cnoidal sudah lama dikenal dengan teori dasarnya pertamakali dikembangkan oleh Korteweg dan de Vries yang diperoleh secara intuitif.

Kata-kata Kunci: Aliran irrotasional, gelombang sinusoidal dan gelombang cnoidal.

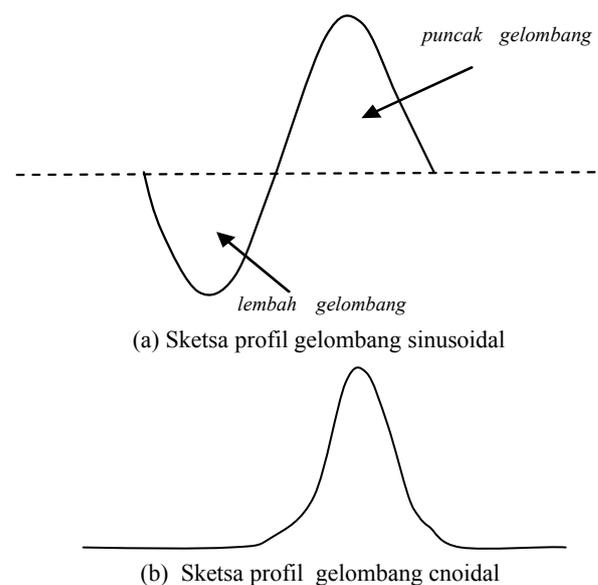
Abstract

This paper presents the result of numerical model of water wave using continuity and Euler's momentum equations. Irrotational characteristic of water flow is substituted into the momentum equation and the resulted equation is worked at water surface. The continuity equation is integrated over water depth using depth average velocity to obtain surface water equation like Airy's long wave equation. The surface water equation and surface momentum equation are solved using numerical method, by first defining the relationship between depth average velocity and velocity at water surface. The important result of the model is that sinusoidal wave deforms to form cnoidal wave in shallow water. Where the cnoidal wave has been known for long time ago which its fundamental theory was developed on an intuitive basis by Korteweg and de Vries.

Keywords: Irrotational flow, sinusoidal and cnoidal wave.

1. Pendahuluan

Persamaan momentum dari Euler, terdiri atas 3 buah persamaan yaitu persamaan momentum-x, momentum-y dan momentum-z. Ketiga persamaan momentum tersebut seharusnya menghasilkan kecepatan yang memenuhi persamaan kontinuitas. Tetapi pada ketiga persamaan tersebut tidak terlihat adanya pembatasan oleh persamaan kontinuitas, seolah-olah bekerja sendiri-sendiri. Karena itu penelitian ini dilakukan dengan tujuan untuk mendapatkan persamaan momentum yang memenuhi persamaan kontinuitas. Dengan persamaan momentum yang memenuhi persamaan kontinuitas tersebut dilakukan pemodelan numeris gelombang sinusoidal tunggal dengan bentuk seperti pada **Gambar 1.a** dihasilkan profil gelombang sinusoidal yang bagian lembahnya mengalami deformasi. Semakin dangkal perairan, semakin besar deformasi yang terjadi dan pada perairan yang sangat dangkal bagian lembah hilang sama sekali sehingga terbentuk gelombang cnoidal sempurna, dengan bentuk seperti pada **Gambar 1.b**.



Gambar 1. Sketsa profil gelombang sinusoidal dan cnoidal

Adapun profil gelombang cnoidal ini sudah lama dikenal. Berdasarkan Sarpkaya (1981), teori gelombang cnoidal dikembangkan pertama kali oleh Korteweg dan de Vries pada tahun 1895 secara intuitif. Karakteristik gelombang pada teori Korteweg dan de Vries dinyatakan dengan fungsi eliptis Jacobian **cn** karena itu disebut sebagai teori gelombang cnoidal. Selanjutnya Laitone pada tahun 1961 dan Chappellear pada tahun 1962 melakukan pendekatan ke dua dan ke tiga. Pengembangan berikutnya dilakukan oleh Fenton pada tahun 1979 dan masih banyak peneliti lain yang mengembangkan teori gelombang cnoidal berdasarkan persamaan Korteweg dan de Vries hingga tahun 1985.

2. Persamaan-persamaan Dasar

Sebagai persamaan dasar adalah persamaan-persamaan pengatur yang sudah banyak dikenal dan digunakan yaitu persamaan kontinuitas dan persamaan momentum dari Euler.

Persamaan kontinuitas untuk aliran 3 dimensi dengan sistem sumbu seperti pada **Gambar 2** adalah,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

Dimana $u = u(x, y, z, t)$ adalah kecepatan horisontal pada arah sumbu-x, $v = v(x, y, z, t)$ kecepatan horisontal pada arah sumbu-y dan $w = w(x, y, z, t)$ adalah kecepatan vertikal pada arah sumbu-z.

Persamaan berikutnya yang digunakan adalah persamaan momentum dari Euler yaitu

a. Persamaan momentum-x

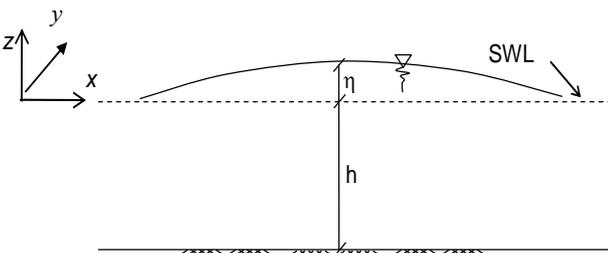
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \tag{2}$$

b. Persamaan momentum-y

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \tag{3}$$

c. Persamaan Momentum-z

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \tag{4}$$



Gambar 2. Sistem koordinat, kedalaman perairan dan fluktuasi muka air

Ketiga persamaan momentum tersebut harus menghasilkan kecepatan yang memenuhi persamaan kontinuitas. Sesungguhnya, persamaan percepatan pada ruas kiri persamaan momentum mengandung karakteristik persamaan kontinuitas yang dapat ditunjukkan dengan mudah yaitu sebagai berikut, dimana sebagai contoh digunakan persamaan momentum-x.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \tag{5}$$

Pengerjaan sifat turunan parsial

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial uu}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial uv}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \text{dan}$$

$$w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial uw}{\partial z} - u \frac{\partial w}{\partial z}$$

Ketiga persamaan turunan parsial tersebut dijumlahkan,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} - u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \tag{6}$$

Suku dalam kurung pada ruas kanan **Persamaan (6)** adalah persamaan kontinuitas. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa ruas kiri persamaan momentum-y dan momentum-z juga mengandung karakteristik persamaan kontinuitas. Mengingat persamaan kontinuitas tersebut adalah sama dengan nol, maka suku dalam kurung tersebut sering dihilangkan, sebagaimana halnya dilakukan pada perumusan persamaan gelombang panjang Airy. Tetapi dengan menghilangkan suku tersebut maka persamaan momentum kehilangan karakteristik persamaan kontinuitas yang terkandung didalam suku percepatan. Dengan melepaskan karakteristik persamaan kontinuitas maka kecepatan yang dihasilkan ke 3 persamaan momentum tersebut tidak ada lagi yang mengatur kesebandingannya agar memenuhi persamaan kontinuitas. Karena itu dalam penelitian ini tidak dilakukan penghilangan karakteristik persamaan kontinuitas pada persamaan momentum.

Untuk menyederhanakan bentuk diferensial pada percepatan konvektif, maka diferensial pada ruas kiri persamaan diubah dalam bentuk yang mudah dengan mengerjakan sifat irrotasional aliran air yaitu

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} \quad (\text{Dean (1984)}), \text{ sehingga}$$

momentum-x, y dan z menjadi,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + w^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (u^2 + v^2 + w^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (8)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (u^2 + v^2 + w^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (9)$$

2.1 Tekanan hidrodinamik

Berdasarkan Hutahaean (2008), tekanan hidrodinamik adalah

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_\eta}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_\eta^2 + v_\eta^2 + w_\eta^2}{2} \right) + g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (10)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_\eta}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_\eta^2 + v_\eta^2 + w_\eta^2}{2} \right) + g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (11)$$

Substitusi persamaan tekanan hidrodinamik $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ dan

$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$ ke **Persamaan (7)** dan **(8)** menghasilkan persamaan

momentum permukaan (Hutahaean (2008)),

$$\frac{\partial u_\eta}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u_\eta^2 + v_\eta^2 + w_\eta^2) = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (12)$$

$$\frac{\partial v_\eta}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (u_\eta^2 + v_\eta^2 + w_\eta^2) = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (13)$$

Dimana u_η , v_η dan w_η adalah kecepatan partikel air pada arah horisontal-x, horisontal-y dan arah vertikal-z pada permukaan.

3. Persamaan Muka Air dan Persamaan Distribusi Kecepatan

Untuk mempermudah perhitungan, maka persamaan kontinuitas (**Persamaan 1**), diintegrasikan terhadap kedalaman dengan mendefinisikan terlebih dahulu kecepatan rata-rata kedalaman. Sebagai kecepatan rata-rata kedalaman adalah kecepatan pada suatu posisi vertikal $z = z_0$

$$U = u(z_0) ; V = v(z_0) ; W = w(z_0) \quad (14)$$

Berdasarkan Hutahaean (2008), untuk gelombang yang bergerak pada arah-x

$$\phi = Ge^{kh} \beta(z) \cos kx \sin \sigma t \quad (15)$$

$$\beta(z) = \alpha e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)} \quad \beta_1(z) = \alpha e^{k(h+z)} - e^{-k(h+z)}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{cc} 1 + \frac{\partial h}{\partial x} & 1 - \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{1 - \frac{\partial h}{\partial x}}{1 - \frac{\partial h}{\partial x}} & \frac{1 + \frac{\partial h}{\partial x}}{1 + \frac{\partial h}{\partial x}} \end{array} \right) \quad (16)$$

Dimana G = konstanta, k = bilangan gelombang, $\sigma = 2\pi/T$, T = periode gelombang,

$\partial h/\partial x$ = kemiringan batimetri pada arah gelombang bergerak. α pada **Persamaan 17** sedikit berbeda dengan yang ada pada Hutahaean (2008), perumusan **Persamaan 17** diperoleh dengan menggunakan solusi lengkap dari persamaan Laplace dengan perumusan disajikan pada lampiran A.

Dengan menggunakan potensial aliran tersebut, maka kecepatan partikel adalah

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (Ge^{kh} \cos kx) \beta(z) \sin \sigma t$$

Didefinisikan kecepatan rata-rata kedalaman adalah

$$U = \frac{1}{\beta_u H} \int_{-h}^{\eta} u \, dz \quad (18)$$

Dimana β_u disebut sebagai koefisien integrasi, $H = h + \eta$. Dengan menggunakan sebagai kecepatan rata-rata kedalaman adalah kecepatan pada posisi $z = z_0$ maka

$$U = u(z_0) = -\frac{\partial}{\partial x} (Ge^{kh} \cos(k_x x + k_y y)) \beta(z_0) \sin \sigma t$$

$$\frac{u}{U} = \frac{\beta(z)}{\beta(z_0)} \quad \text{dan} \quad u = \frac{\beta(z)}{\beta(z_0)} U$$

$$\beta_u = \frac{1}{UH} \int_{-h}^{\eta} u \, dz = \frac{1}{UH} \int_{-h}^{\eta} \frac{\beta(z)}{\beta(z_0)} \, dz$$

$$\beta_u = \frac{\beta_1(\eta) - (\alpha - 1)}{kH\beta(z_0)} \quad (19)$$

Mengingat v mempunyai distribusi terhadap kedalaman yang sama dengan distribusi u , maka koefisien integrasi untuk kecepatan v adalah sama dengan koefisien integrasi untuk kecepatan u

$$\beta_v = \beta_u \quad (20)$$

Relasi antara kecepatan rata-rata kedalaman dengan kecepatan pada posisi z , dapat dihitung dengan persamaan distribusi kecepatan sebagai berikut,

$$u(z) = \frac{\beta(z)}{\beta(z_0)} U \quad v(z) = \frac{\beta(z)}{\beta(z_0)} V \quad (21)$$

Persamaan (21) ini digunakan untuk menghitung kecepatan rata-rata kedalaman dari kecepatan permukaan u_η dan v_η yang dihitung dari persamaan momentum, **Persamaan (12)** dan **(13)**.

Dengan menggunakan definisi kecepatan rata-rata kedalaman dan koefisien integrasi tersebut, persamaan kontinuitas diintegrasikan terhadap kedalaman, dengan hasil integrasi adalah sebagai berikut.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial \beta_u H U}{\partial x} - \frac{\partial \beta_v H V}{\partial y} \quad (22)$$

Sedangkan persamaan momentum-x dan momentum-y tetap berbentuk seperti pada **Persamaan (12)** dan **(13)**.

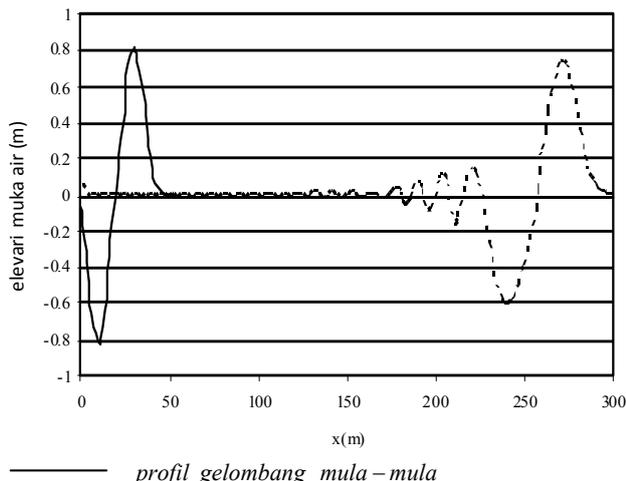
Persamaan kontinuitas yang terintegrasi terhadap kedalaman dan persamaan momentum permukaan diselesaikan secara numeris dimana pada penelitian ini diferensial ruang diselesaikan dengan metoda selisih hingga, sedangkan diferensial waktu diselesaikan dengan metoda prediktor-korektor berbasis integrasi numeris dari Newton-Cote (Hutahaean (2007)).

4. Hasil Persamaan

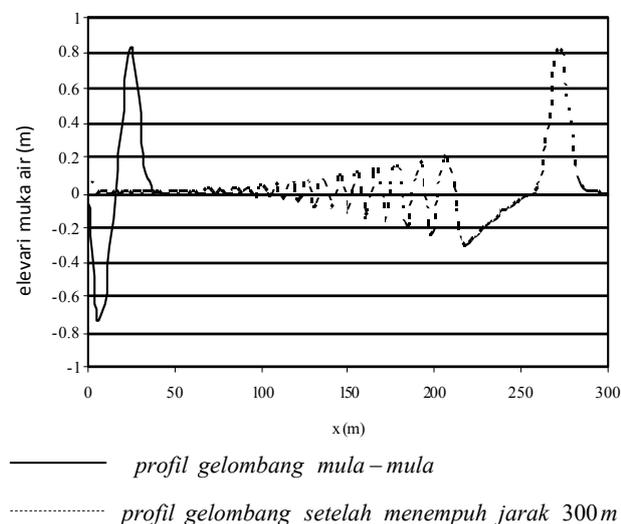
Model diberi input gelombang progressif sinusoidal tunggal dengan perioda 6 detik dengan amplitudo 0,8 m, pada kedalaman konstan sebesar 6 m dan 3 m.

Pada **Gambar 3 (a)**, dan **(b)** diperlihatkan profil gelombang hasil model pada kondisi mula-mula. Mula-mula profil gelombang berbentuk sinusoidal sesuai dengan input yang diberikan. Setelah menempuh jarak kurang lebih 300 m terjadi perubahan dimana pada bagian lembah gelombang mengalami pengurangan amplitudo. Pada kedalaman 6 m, terlihat pada bagian puncak gelombang juga mengalami sedikit pengurangan, diperkirakan hal ini dikarenakan fenomena dispersif. Fenomena lain yang terlihat adalah munculnya gelombang-gelombang kecil yang berprofil sinusoidal. Munculnya anak-anak gelombang dikarenakan akibat pelepasan energi gelombang pada bagian lembah gelombang.

Selanjutnya model dikerjakan pada perairan dengan kedalaman berubah, yaitu pada bagian 0-150 m kemiringan dasar perairan adalah 4/150, dimana kedalaman mula-mula adalah 5 m, sedangkan pada jarak 150 m kedalaman menjadi 1,0 m, selanjutnya pada jarak 150 m – 300 m, kedalaman konstan sebesar 1,0 m. Gelombang yang digunakan adalah gelombang dengan perioda 6 detik dengan amplitudo 0,8 m.

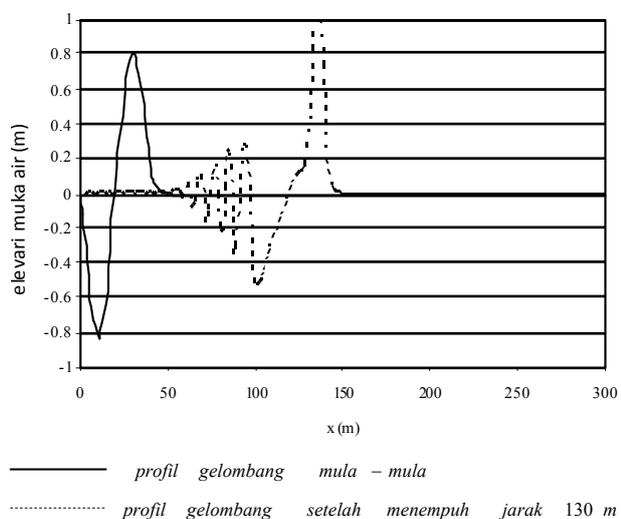


(a) Profil gelombang pada kedalaman 6 m.

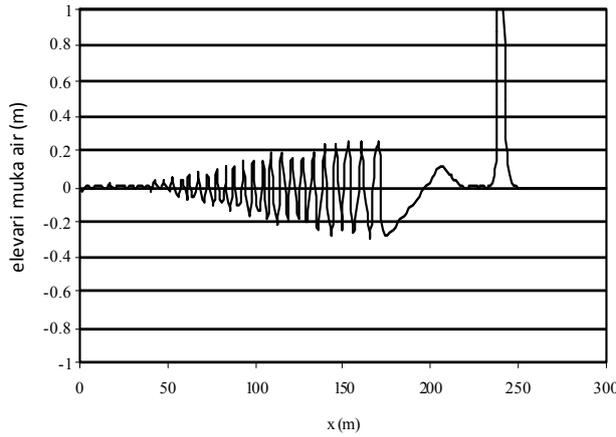


(b) Profil gelombang pada kedalaman 3 m.

Gambar 3. Profil gelombang pada kedalaman konstan



(a) Profil gelombang mula-mula dan setelah menempuh jarak 130 m



(b) Profil gelombang pada kedalaman 1 m

Gambar 4. Profil gelombang, pada dasar perairan berubah (a,b)

Hasil model pada dasar perairan berubah disajikan pada **Gambar 4 (a)** dan **(b)**. Pada **Gambar 4 (a)**, diperlihatkan bahwa profil gelombang mula-mula adalah sinusoidal sesuai dengan input yang diberikan. Pada jarak mendekati 150 m, dengan kedalaman hampir 1,0 m, bagian lembah gelombang mengalami pengurangan amplitudo sedangkan bagian puncak gelombang mengalami penambahan amplitudo atau gelombang mengalami shoaling. Setelah memasuki kedalaman 1 m, terbentuk profil gelombang cnoidal sempurna dan bagian lembah gelombang memisah dari bagian puncak gelombang. Pada kedalaman 1 m, amplitudo bagian puncak mencapai lebih dari 1 m, kurang lebih 1,20 m dan gelombang tidak mengalami breaking, jadi model belum bisa mensimulasikan breaking. Tetapi bisa juga dikarenakan profil gelombang cnoidal ini sudah dikenal sangat stabil.

Pada bagian terdahulu telah diuraikan bahwa pengembangan model dilakukan dengan mempertahankan bagian percepatan pada persamaan momentum dan pengerjaan tekanan hidrodinamis gelombang pendek. Sehingga belum diketahui penyebab terbentuknya gelombang cnoidal. Untuk mengetahui penyebab pembentukan gelombang cnoidal, maka dikembangkan model dengan anggapan gelombang panjang dengan distribusi kecepatan seragam pada seluruh kedalaman dan dengan tekanan hidrostatik.

Dalam hal dikerjakan anggapan gelombang panjang dimana gaya yang bekerja gaya hidrostatik saja dan kecepatan partikel seragam pada seluruh kedalaman, maka integrasi persamaan kontinuitas, persamaan momentum-x (**Persamaan (2)**) dan persamaan momentum-y (**Persamaan (3)**) terhadap kedalaman menghasilkan persamaan,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial UH}{\partial x} - \frac{\partial VH}{\partial y} \quad (23)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{H} \left(\frac{\partial UUH}{\partial x} - u_{\eta} u_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - u_{-h} u_{-h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial VVH}{\partial x} - v_{\eta} v_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - v_{-h} v_{-h} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{1}{H} \left(\frac{\partial WWH}{\partial x} - w_{\eta} w_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - w_{-h} w_{-h} \frac{\partial h}{\partial x} \right) = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (24)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{H} \left(\frac{\partial UUH}{\partial y} - u_{\eta} u_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} - u_{-h} u_{-h} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial VVH}{\partial y} - v_{\eta} v_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} - v_{-h} v_{-h} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{1}{H} \left(\frac{\partial WWH}{\partial y} - w_{\eta} w_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} - w_{-h} w_{-h} \frac{\partial h}{\partial y} \right) = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (25)$$

$$W = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v dz + \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (26)$$

U, V, W , adalah kecepatan rata-rata kedalaman pada arah x, y dan z . Kecepatan horisontal permukaan u_{η} dan v_{η} serta kecepatan horisontal pada dasar perairan diambil sama dengan kecepatan rata-rata kedalaman yaitu u_{η} dan v_{η} $u_{\eta} = v_{-h} = U$ dan $v_{\eta} = v_{-h} = V$. Kecepatan vertikal permukaan dihitung dengan menggunakan syarat batas kinematik permukaan

$$w_{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

sedangkan kecepatan menggunakan syarat batas kinematik dasar perairan

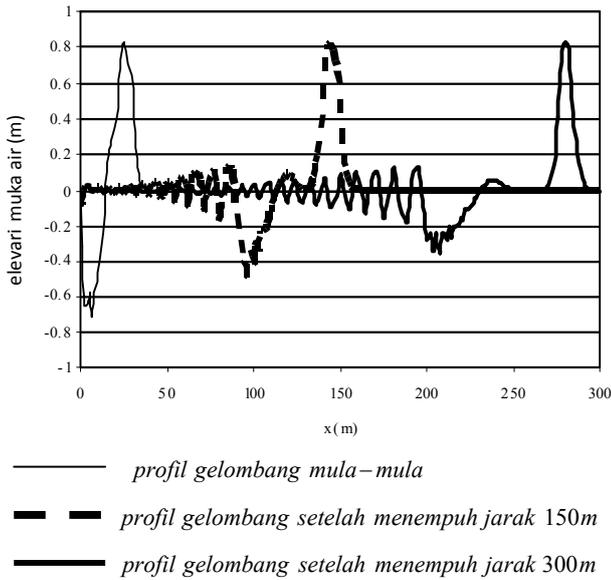
$$w_{-h} = -u_{-h} \frac{\partial h}{\partial x} - v_{-h} \frac{\partial h}{\partial y}$$

sedangkan z_0 adalah posisi

kedalaman dimana dilakukan perhitungan kecepatan vertikal $W = w(x, y, z_0, t)$.

Perhitungan dengan menggunakan keempat persamaan tersebut dengan input gelombang sinusoidal dan pada kedalaman konstan sebesar 5 m juga memberikan hasil dimana gelombang sinusoidal berdeformasi menjadi gelombang cnoidal (**Gambar 5**), dengan laju deformasi yang lebih cepat dari model sebelumnya dan terlihat jelas terdapatnya gelombang cnoidal.

Dari hasil ini dapat disimpulkan bahwa profil gelombang cnoidal dihasilkan oleh persamaan momentum (**Persamaan 2 dan 3**) bukan dikarenakan penggunaan tekanan hidrodinamik (**Persamaan (7)** dan **(8)**). Tetapi dikarenakan penggunaan persamaan momentum dimana masih terdapat karakteristik persamaan kontinuitas pada suku percepatan atau dengan kata lain percepatan yang terjadi masih dikontrol oleh persamaan kontinuitas.



Gambar 5. Hasil persamaan dengan anggapan gelombang panjang

5. Pembahasan

Persamaan muka air dari gelombang air yang diperoleh secara analitik yaitu dengan mengintegrasikan persamaan syarat batas kinematik permukaan dengan metoda inversi integral dengan ketelitian $O(\delta^2)$ (Hutahaean (2010)), adalah:

$$\begin{aligned} \eta(x,t) = & \left(\frac{G}{\sigma} e^{kh} k \beta_1(\eta) \right) \cos kx \cos \sigma t \\ & - \left(\frac{G}{\sigma} e^{kh} \frac{k^2}{\sigma} \beta(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \cos kx \sin \sigma t \\ & - \left(\frac{G}{\sigma} e^{kh} \frac{k^3}{\sigma^2} \beta_1(\eta) \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 \right) \cos kx \cos \sigma t \\ & - \left(\frac{G}{\sigma} e^{kh} \frac{k^2}{\sigma^2} \beta(\eta) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right) \cos kx \cos \sigma t \\ & + \left(\frac{G}{\sigma} e^{kh} k \beta(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \sin kx \cos \sigma t \\ & - \left(\frac{G}{\sigma} e^{kh} \frac{k^2}{\sigma} \beta_1(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \sin kx \sin \sigma t \\ & - \left(\frac{G}{\sigma} e^{kh} \frac{k}{\sigma} \beta(\eta) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} \right) \sin kx \sin \sigma t \\ & - \left(\frac{G}{\sigma} \frac{1}{2h} \frac{\partial h}{\partial x} e^{kh} \beta(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \cos kx \cos \sigma t \\ & + \left(\frac{G}{\sigma} \frac{1}{2h} \frac{\partial h}{\partial x} e^{kh} \frac{k}{\sigma} \beta_1(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \cos kx \sin \sigma t \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{G}{\sigma} \frac{1}{2h} \frac{\partial h}{\partial x} e^{kh} \frac{1}{\sigma} \beta(\eta) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} \right) \cos kx \sin \sigma t \tag{27}$$

Dimana $\beta(\eta) = \alpha e^{k(h+\eta)} + e^{-k(h+\eta)}$,

$$\beta_1(\eta) = \alpha e^{k(h+\eta)} - e^{-k(h+\eta)}$$

untuk dasar perairan datar $\beta(\eta) = 2 \cosh k(h + \eta)$

dan $\beta_1(\eta) = 2 \sinh k(h + \eta)$

Suku utama pada **Persamaan (27)** tersebut adalah suku ke 1 yaitu suku yang mempunyai amplitudo terbesar. Karena itu persamaan ini dapat didekati dengan persamaan, $\eta = A \cos kx \cos \sigma t$ dengan turunan-turunan dari persamaan pendekatan ini adalah,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\sigma A \cos kx \sin \sigma t ; \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\sigma^2 A \cos kx \cos \sigma t$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -k A \sin kx \cos \sigma t ; \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} = -\sigma k A \sin kx \sin \sigma t$$

Persaman-persamaan tersebut disubstitusikan ke **Persamaan (27)**,

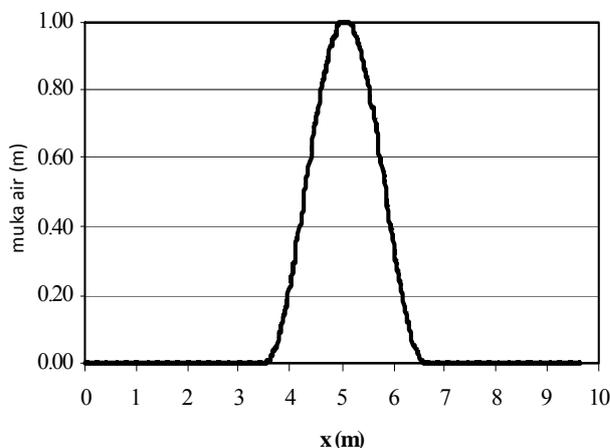
$$\begin{aligned} \eta(x,t) = & \left(\frac{G}{\sigma} e^{kh} k \beta_1(\eta) \right) \cos kx \cos \sigma t \\ & + \left(\frac{G}{\sigma} e^{kh} \frac{k^2}{\sigma} \beta(\eta) \right) \sigma A \cos^2 kx \sin^2 \sigma t \\ & - \left(\frac{G}{\sigma} e^{kh} \frac{k^3}{\sigma^2} \beta_1(\eta) \right) \sigma^2 A^2 \cos^3 kx \cos \sigma t \sin \sigma t \\ & + \left(\frac{G}{\sigma} e^{kh} \frac{k^2}{\sigma^2} \beta(\eta) \right) \sigma^2 A \cos^2 kx \cos^2 \sigma t \\ & - \left(\frac{G}{\sigma} e^{kh} k \beta(\eta) \right) k A \sin^2 kx \cos^2 \sigma t \\ & - \left(\frac{G}{\sigma} e^{kh} \frac{k^2}{\sigma} \beta_1(\eta) \right) \sigma k A^2 \cos kx \sin^2 kx \cos \sigma t \sin^2 \sigma t \\ & + \left(\frac{G}{\sigma} e^{kh} \frac{k}{\sigma} \beta(\eta) \right) \sigma k A \sin^2 kx \sin^2 \sigma t \\ & + \left(\frac{G}{\sigma} \frac{1}{2h} \frac{\partial h}{\partial x} e^{kh} \beta(\eta) \right) k A \sin kx \cos kx \cos^2 \sigma t \\ & + \left(\frac{G}{\sigma} \frac{1}{2h} \frac{\partial h}{\partial x} e^{kh} \frac{k}{\sigma} \beta_1(\eta) \right) \sigma k A^2 \cos^2 kx \sin kx \cos \sigma t \sin^2 \sigma t \\ & - \left(\frac{G}{\sigma} \frac{1}{2h} \frac{\partial h}{\partial x} e^{kh} \frac{1}{\sigma} \beta(\eta) \right) \sigma k A \sin \cos kx \sin^2 \sigma t \end{aligned} \tag{28}$$

Baik pada **Persamaan 27** maupun **Persamaan 28**, suku utama yaitu suku yang mempunyai amplitudo terbesar adalah suku ke 1 ruas kanan persamaan. Pada suku tersebut terdapat unsur $\beta_1(\eta)$. Harga $\beta_1(\eta)$ pada saat η negatif adalah lebih kecil dari pada $\beta_1(\eta)$ pada saat η positif untuk harga $|\eta|$ yang sama, sehingga amplitudo lembah gelombang akan lebih kecil daripada amplitudo puncak gelombang. Kondisi ini menyebabkan gelombang menjadi labil sehingga terjadi pelepasan energi gelombang dari bagian lembah gelombang secara terus menerus sehingga pada akhirnya terbentuk profil gelombang cnoidal sempurna. Pada perairan dangkal ini harga $\beta_1(\eta)$ pada saat η negatif dapat menjadi nol.

Suku yang mempunyai amplitudo terbesar ke 2 pada **Persamaan (27)** dan **(28)**, adalah suku ke 2. Suku ini mengandung unsur $\beta(\eta)$ yang mempunyai sifat yang sama dengan harga $\beta_1(\eta)$ yaitu harga $\beta(\eta)$ pada saat η positif adalah lebih besar dari harga $\beta(\eta)$ pada saat η negatif, jadi suku ini mempunyai bentuk bagian puncak lebih besar daripada bagian lembah. Selain itu, suku ini mengandung unsur $\cos^2 kx \sin^2 \sigma t$ yang selalu berharga positif, dimana suku ini menghasilkan profil gelombang cnoidal dengan panjang gelombang setengah dari panjang gelombang sinusoidal seperti diperlihatkan pada **Gambar 6**.

Dengan demikian baik **Persamaan (27)** maupun **Persamaan (28)** akan memberikan profil gelombang yang tidak simetri antara bagian puncak dengan bagian lembah gelombang, dimana bagian lembah gelombang lebih kecil dari pada bagian puncak gelombang dan bagian lembah menghilang pada perairan yang sangat dangkal.

Terbentuknya anak-anak gelombang pada bagian belakang gelombang adalah dikarenakan pelepasan energi gelombang pada saat kurva gelombang seharusnya menurun, tetapi tidak dapat turun karena tertahan oleh air di bawahnya seperti yang dinyatakan



Gambar 6. Kurva dari fungsi kuadrat sinusoidal

oleh unsur $\beta_1(\eta)$ dan $\beta(\eta)$ Berdasarkan Hutahaean (2010), baik **Persamaan (27)** maupun **Persamaan (28)** mengandung fenomena dispersif.

6. Kesimpulan

Dari hasil studi ini didapatkan beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Kandungan persamaan kontinuitas pada persamaan momentum sebaiknya dipertahankan, agar kecepatan yang dihasilkan memenuhi persamaan kontinuitas.
2. Pemodelan gelombang cnoidal dapat dilakukan dengan mensubstitusikan sifat irrotasional aliran air pada persamaan momentum.
3. Dengan profil gelombang cnoidal ini maka gelombang yang dihadapi oleh bangunan pantai adalah lebih kecil dari tinggi gelombang sinusoidal, sehingga perencanaan bangunan pantai dengan menggunakan profil gelombang cnoidal ini akan lebih menghemat biaya. Karena itu perlu diteliti secara lebih intensif mengenai gelombang cnoidal tersebut selain untuk mendapatkan model gelombang yang lebih realistis diperairan pantai juga agar perencanaan bangunan pantai lebih efisien terhadap penggunaan material bangunan dan biaya.
4. Prospek aplikasi dari karakteristik deformasi gelombang sinusoidal ini adalah pada perencanaan breakwater tenggelam, dimana breakwater dapat direncanakan untuk mendeformasikan gelombang sinusoidal menjadi gelombang cnoidal dengan tinggi gelombang $\pm 1/2$ dari tinggi mula-mula yang berprofil sinusoidal.

Daftar Pustaka

- Dean, R.G., and Dalrymple, 1984, *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Hutahaean, S., 2007, Pemodelan Dinamika Gelombang dengan Mengerjakan Persamaan Kekekalan Energi, *Jurnal Teknik Sipil*, Volume 14, No. 1, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, ITB.
- Hutahaean, S., 2008, Persamaan Gelombang Nonlinier Pada Dasar Perairan Miring, *Jurnal Teknik Sipil*, Volume 15 No.1, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, ITB.
- Hutahaean, S., 2010, Pengerjaan Metoda Inversi Integral Pada Perumusan Persamaan Muka Air Gelombang Air Nonlinier, *Jurnal Teknik Sipil*, Volume 17 No.2, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, ITB,
- Sarpkaya, T., and Isacson, M., 1981, *Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures*, Van Nostrand Reinhold Company.

Lampiran A

Perumusan Persamaan Potensial Aliran

Hasil penyelesaian persamaan Laplace dengan metoda pemisahan variabel adalah (Dean (1984)),

$$\phi(x, z, t) = (A \cos kx + B \sin kx) (Ce^{kz} + De^{-kz}) \sin \sigma t$$

$$\phi(x, z, t) = A \cos kx (Ce^{kz} + De^{-kz}) \sin \sigma t + B \sin kx (Ce^{kz} + De^{-kz}) \sin \sigma t$$

Mengingat sifat linier persamaan Laplace, maka persamaan terakhir dapat ditulis menjadi,

$$\phi(x, z, t) = \phi_A(x, z, t) + \phi_B(x, z, t) \tag{1}$$

$$\phi_A(x, z, t) = A \cos kx (Ce^{kz} + De^{-kz}) \sin \sigma t$$

$$\phi_B(x, z, t) = B \sin kx (Ce^{kz} + De^{-kz}) \sin \sigma t$$

A, B, C dan D adalah bilangan konstan,

a. $\phi_A(x, z, t) = A \cos kx (Ce^{kz} + De^{-kz}) \sin \sigma t$

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = Ak \sin kx (Ce^{kz} + De^{-kz}) \sin \sigma t$$

$$w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -Ak \cos kx (Ce^{kz} - De^{-kz}) \sin \sigma t$$

Syarat batas kinematik dasar perairan,

$$w_{-h} = -u_{-h} \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$-Ak \cos kx (Ce^{-kh} - De^{kh}) \sin \sigma t = (Ce^{-kh} + De^{kh}) \sin \sigma t$$

Diambil kondisi $\cos kx = \sin kx = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

persamaan dibagi dengan $Ak \cos kx \sin \sigma t$

$$Ce^{-kh} - De^{kh} = \frac{\partial h}{\partial x} (Ce^{-kh} + De^{kh})$$

$$Ce^{-kh} \left(1 - \frac{\partial h}{\partial x}\right) = De^{kh} \left(1 + \frac{\partial h}{\partial x}\right) \text{ atau}$$

$$C = \frac{1 + \frac{\partial h}{\partial x}}{1 - \frac{\partial h}{\partial x}} e^{2kh} D$$

$$\alpha_A = \frac{1 + \frac{\partial h}{\partial x}}{1 - \frac{\partial h}{\partial x}} \tag{2}$$

$$C = \alpha_A e^{2kh} D$$

Substitusi C kepersamaan potensial aliran,

$$\phi_A(x, z, t) = AD \cos kx (\alpha_A e^{2kh} e^{kz} + e^{-kz}) \sin \sigma t$$

$$\phi_A(x, z, t) = AD e^{kh} \cos kx (\alpha_A e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)}) \sin \sigma t$$

Didefinisikan konstanta baru G_A dimana $G_A = AD$

$$\phi_A(x, z, t) = G_A e^{kh} \cos kx (\alpha_A e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)}) \sin \sigma t \tag{3}$$

b. $\phi_B(x, z, t) = B \sin kx (Ce^{kz} + De^{-kz}) \sin \sigma t$

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -Bk \cos kx (Ce^{kz} + De^{-kz}) \sin \sigma t$$

$$w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -Bk \sin kx (Ce^{kz} - De^{-kz}) \sin \sigma t$$

$$w_{-h} = -u_{-h} \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$-Bk \sin kx (Ce^{-kh} - De^{kh}) \sin \sigma t = Bk \cos kx (Ce^{-kh} + De^{kh}) \frac{\partial h}{\partial x} \sin \sigma t$$

Diambil kondisi $\cos kx = \sin kx = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

persamaan dibagi dengan $Bk \cos kx \sin \sigma t$,

$$-(Ce^{-kh} - De^{kh}) = (Ce^{-kh} + De^{kh}) \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$-Ce^{-kh} \left(1 + \frac{\partial h}{\partial x}\right) = -De^{kh} \left(1 - \frac{\partial h}{\partial x}\right)$$

$$C = De^{2kh} \frac{1 - \frac{\partial h}{\partial x}}{1 + \frac{\partial h}{\partial x}} \text{ atau } C = \alpha_B De^{2kh}$$

$$\alpha_B = \frac{1 - \frac{\partial h}{\partial x}}{1 + \frac{\partial h}{\partial x}} \tag{4}$$

$$\phi_B(x, z, t) = B \sin kx (D \alpha_B e^{2kh} e^{kz} + De^{-kz}) \sin \sigma t$$

$$\phi_B(x, z, t) = BD e^{kh} \sin kx (\alpha_B e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)}) \sin \sigma t$$

$$\phi_B(x, z, t) = BD e^{kh} \sin kx (\alpha_B e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)}) \sin \sigma t$$

$$\phi_B(x, z, t) = G_B e^{kh} \sin kx (\alpha_B e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)}) \sin \sigma t \tag{5}$$

Hutahaean

Substitusi (a.3) dan (a.5) kepersamaan (a.1)

$$\begin{aligned}\phi(x, z, t) &= G_A e^{kh} \cos kx (\alpha_A e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)}) \sin \sigma t \\ &\quad + G_B e^{kh} \sin kx (\alpha_B e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)}) \sin \sigma t\end{aligned}$$

Pada saat $\cos kx = \sin kx$

$$\begin{aligned}\phi(x, z, t) &= G_A e^{kh} \cos kx (\alpha_A e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)}) \sin \sigma t \\ &\quad + G_B e^{kh} \cos kx (\alpha_B e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)}) \sin \sigma t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(x, z, t) &= (G_A (\alpha_A e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)}) + G_B (\alpha_B e^{k(h+z)} \\ &\quad + e^{-k(h+z)})) e^{kh} \cos kx \sin \sigma t\end{aligned}$$

Pada dasar perairan datar $\alpha_A = \alpha_B = 1$

$$\begin{aligned}\phi(x, z, t) &= (G_A (\alpha_A e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)}) + G_B (\alpha_B e^{k(h+z)} \\ &\quad + e^{-k(h+z)})) e^{kh} \cos kx \sin \sigma t\end{aligned}$$

$$\phi(x, z, t) = (G_A + G_B) e^{kh} (e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)}) \cos kx \sin \sigma t$$

$$G = G_A + G_B$$

$$\phi(x, z, t) = G e^{kh} (e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)}) \cos kx \sin \sigma t$$

(6)

Jadi diperlukan suatu potensial aliran, dimana pada dasar perairan datar dan pada saat berbentuk seperti persamaan (a.6). Persamaan potensial aliran sebagai berikut adalah memenuhi kondisi perairan datar dan pada saat $\cos kx = \sin kx$,

$$\begin{aligned}\phi(x, z, t) &= G' e^{kh} ((\alpha_A e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)}) + \\ &\quad (\alpha_B e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)})) \cos kx \sin \sigma t\end{aligned}$$

$$\phi(x, z, t) = G e^{kh} ((\alpha_A + \alpha_B) e^{k(h+z)} + 2e^{-k(h+z)}) \cos kx \sin \sigma t$$

$$\phi(x, z, t) = 2G e^{kh} \left(\frac{(\alpha_A + \alpha_B)}{2} e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)} \right) \cos kx \sin \sigma t$$

$$\phi(x, z, t) = G e^{kh} \left(\frac{(\alpha_A + \alpha_B)}{2} e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)} \right) \cos kx \sin \sigma t$$

$$\alpha_A = \frac{1 + \frac{\partial h}{\partial x}}{1 - \frac{\partial h}{\partial x}}, \quad \alpha_B = \frac{1 - \frac{\partial h}{\partial x}}{1 + \frac{\partial h}{\partial x}}$$

$$\alpha = \frac{\alpha_A + \alpha_B}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \frac{\partial h}{\partial x}}{1 - \frac{\partial h}{\partial x}} + \frac{1 - \frac{\partial h}{\partial x}}{1 + \frac{\partial h}{\partial x}} \right) \quad (7)$$

$$\phi(x, z, t) = G e^{kh} (\alpha e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)}) \cos kx \sin \sigma t$$

$$\phi(x, z, t) = G e^{kh} \beta(z) \cos kx \sin \sigma t \quad (8)$$

$$\text{Dimana } \beta(z) = \alpha e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)} \quad (9)$$

